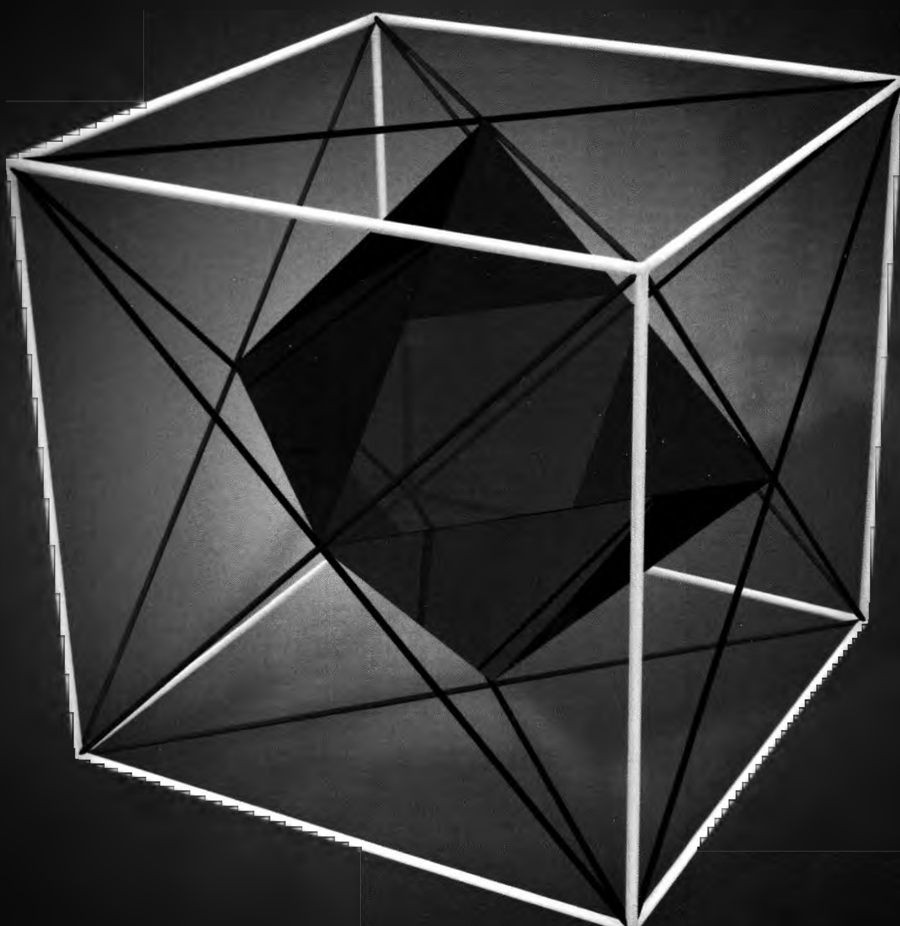
UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA
EDICIJA TEHNIČKE NAUKE - UDŽBENICI

659

Rade Doroslovački



ALGEBRA

FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2017

UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA

Rade Doroslovački

ALGEBRA

Novi Sad, 2017

Edicija: "TEHNIČKE NAUKE - UDŽBENICI"

Naziv udžbenika: "ALGEBRA"

Autor: dr Rade Doroslovački, redovni profesor na FTN-u u Novom Sadu

Recenzenti: prof. dr Zoran Stojaković, Prirodno-matimatički fakultet u Novom Sadu
prof. dr Ilija Kovačević, Fakultet tehničkih nauka u Novom Sadu

Izdavač: Fakultet tehničkih nauka u Novom Sadu

Glavni i odgovorni urednik:
Prof. dr Rade Doroslovački, dekan Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu

Dizajn i štampa: FTN - Grafički centar GRID, Trg Dositeja Obradovića 6, Novi Sad

Štampanje odobrio:
Savet za bibliotečku i izdavačku delatnost Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu

Predsednik Saveta za bibliotečku i izdavačku delatnost:
Dr Radoš Radivojević, redovni profesor Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu

CIP-Каталогизација у публикацији
Библиотека Матице српске, Нови Сад

512(075.8)

ДОРОСЛОВАЧКИ, Раде
Algebra / Rade Doroslovački. - 2. izd. - Novi Sad : Fakultet tehničkih nauka, 2017 (Novi Sad : FTN, Grafički centar GRID). - 303 str. : ilustr. ; 24 cm. - (Edicija "Tehničke nauke - udžbenici" ; 659)

Tiraž 800. - Bibliografija. - Registar.

ISBN 978-86-7892-965-6

a) Алгебра

COBISS.SR-ID 316997895

Sadržaj

Matematika nije izolovana nauka.
Ona je osnova i ključ za sva čovekova saznanja.
Oyler

PREDGOVOR

Ovaj udžbenik namenjen je studentima tehničkih fakulteta i svima onima koji žele da na popularan i jednostavan način što brže steknu osnovna znanja iz apstraktne algebre, linearne algebre, diskretne matematike i osnova kombinatorike. Sadržaj udžbenika čini materija s mojih predavanja na predmetu Diskretna matematika i linearna algebra na departmanu Energetika, elektronika i telekomunikacije, kao i na departmanu Računarstvo i automatika. Udžbenik sadrži dovoljan broj rešenih reprezentativnih zadataka koji omogućuju lakše shvatanje apstraktnih algebarskih i kombinatornih pojmova.

Zbirka testova je vrlo značajan dodatak ovome udžbeniku!

Kako se gotovo sva matematika temelji na relacijama poretka i ekvivalencije i funkcijama, to je posvećena posebna pažnja ovim oblastima, sa raznim reprezentativnim primerima i paralelno interpretirano sa kombinatorikom, štoje od velike važnosti sa stručnog i metodičkog aspekta.

Delovi teksta odštampani sitnim slovima nisu potrebni za ispit.

U Novom Sadu, Autor
10. septembar 2017.

Poglavlje 1

(NEŠTO) O LOGICI I SKUPOVIMA

Jedan od osnovnih pojmova matematike jeste skup. Ostali matematički objekti (pojmovi) definišu se polazeći od pojma skupa. Postoji veoma snažna intuicija o pojmu skupa, što pretpostavlja elementarno srednjoškolsko znanje iskazne algebre i matematičke logike koje omogućuje elegantnije, jasnije i kraće izučavanje materije koja se izlaže.

U poglavlju Bulova algebra (videti 4.1, 4.2 i 4.3), iskazna algebra i algebra skupova prikazane su kao primeri, modeli Bulove algebre, čime su faktički obrađeni iskazna algebra, deo teorije brojeva i algebra skupova!

Svima je znano da su izkazi, tj. iskazne rečenice takvi sklopovi na koje se može primeniti jedna i samo jedna od reči, istinito ili neistinito, tako da „to ima smisla".

Binarna operacija konjunkcija, u oznaci $\wedge$, među iskazima p i q je takva da je iskaz $p \wedge q$ istinit ako i samo ako su oba istinita, a operacija disjunkcija u oznaci $\vee$ takva da je $p \vee q$ istinit ako i samo ako je bar jedan istinit.

Negacija, u oznaci $\neg$, jeste unarna operacija takva da ako je p istinit, tada je $\urcorner p$ neistinit a ako je p neistinit, tada je $\urcorner p$ istinit.

Činjenice iz prethodna dva pasusa ne mogu se dokazati, one su plod logike ljudskoga roda (mi smo ih samo imenovali, „definisali"). Sada, na primer, može se dokazati da iskaz $\urcorner(p \wedge q)$ ima uvek istu istinitosnu vrednost sa iskazom $\urcorner p \vee \urcorner q$, za sve vrednosti iskaza p i q, odnosno $\urcorner(p \wedge q) = \urcorner p \vee \urcorner q$. Dokaz sledi efektivnom proverom sva četiri moguća slučaja.

Međutim, i bez provere, nama, pripadnicima ljudskoga roda, to je jasno i bez dokazivanja, jer suprotno tome da su oba tačna, jeste da je bar jedan netačan!

Ovaj logički zakon naziva se Demorganov zakon (tautologija) i jasno je da postoji u svakom „ispravnom ljudskom mozgu".

Logička operacija ekvivalencija označena je sa $\Leftrightarrow$ i iskaz $p \Leftrightarrow q$ je tačan ako i samo ako su iskazi p i q takvi da su istovremeno oba tačna ili oba netačna.

Sada, umesto $\urcorner(p \wedge q) = \urcorner p \vee \urcorner q$ pisaće se $\urcorner(p \wedge q) \Leftrightarrow \urcorner p \vee \urcorner q$.

Na taj način dalje se izgrađuje naša sopstvena logika, tj. formalizuje se, uređuje.

Ako je $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, tada se uvode oznake $(\exists x \in A)\pi(x)$ (čita se: Postoji x iz skupa A takav da je $\pi(x)$ tačno) i $(\forall x \in A)\pi(x)$ (čita se: Za svako x iz skupa A je $\pi(x)$ tačno), koje su definisane sa:

$$(\exists x \in A)\pi(x) \Leftrightarrow \pi(x_1) \vee \pi(x_2) \vee \cdots \vee \pi(x_n)$$

$$(\forall x \in A)\pi(x) \Leftrightarrow \pi(x_1) \wedge \pi(x_2) \wedge \cdots \wedge \pi(x_n),$$

gde je π osobina koju proizvoljni element može zadovoljavati ili ne zadovoljavati, tj. $\pi(x)$ je iskaz, što znači da je ili tačan ili netačan.

Simboli $\forall$ i $\exists$ nazivaju se kvantifikatori redom „za svako" i „postoji".

Vrlo važne teoreme iz iskazne algebre (tautologije), koje se veoma često koriste u radu, jesu Demorganovi zakoni (videti teoremu 4.13): $\urcorner(p \vee q) \Leftrightarrow \urcorner p \wedge \urcorner q$ i $\urcorner(p \wedge q) \Leftrightarrow \urcorner p \vee \urcorner q$, a njihove generalizacije za $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, gde su $\pi(x_1), \pi(x_2), \cdots, \pi(x_n)$ neki iskazi glase:

$$\urcorner\Big((\exists x \in A)\pi(x)\Big) \Leftrightarrow (\forall x \in A)\urcorner\pi(x)\ ,$$

$$\urcorner\Big((\forall x \in A)\pi(x)\Big) \Leftrightarrow (\exists x \in A)\urcorner\pi(x).$$

Ili na primerima: Rečenica „Nije tačno da postoji jednakostraničan trougao" ekvivalentna je sa „Svaki trougao je nejednakostraničan", gde je A – skup trouglova, a osobina π – biti jednakostraničan. Rečenica „Nije tačno da su svi ljudi humani" ekvivalentna je rečenici „Postoji čovek koji nije human", gde je A – skup ljudi, a osobina π – biti human.

Izuzetno važna binarna operacija u algebri iskaza je i IMPLIKACIJA, koja se čita ovako: „ako je p, tada je i q", što se označava sa $p \Rightarrow q$.

Šta logika ljudskoga roda kaže, kada je iskaz $p \Rightarrow q$ tačan, a kada netačan?

Implikacija kaže da ako je p tačan, onda i q mora biti tačan, ***a ako p nije tačan, onda – nikom ništa, sve je u redu!***

Implikacija je netačna ako i samo ako je p tačan i q netačan, i NIKAD VIŠE!

Drugim rečima, ako je iskaz p netačan, tada je p ⇒ q tačan iskaz bez obzira da li je iskaz q tačan ili netačan!

Kada se ispituje tačnost implikacije $p \Rightarrow q$, dovoljno je proveravati samo $p = \top$, jer u slučaju $p = \perp$ implikacija je uvek tačna bez obzira kakav je q, a ako je i $q = \top$, tada je implikacija takođe tačna, bez obzira kakav bio iskaz p.

Činjenica 1.1

Iz rečenoga sledi da se tačnost implikacije $p \Rightarrow q$ proverava tako što se samo pokazuje da su slučaj $p = \top$ i $q = \perp$ NEPOSTOJEĆI, odnosno da se nikada neće desiti da je $\top \Rightarrow \perp$.

Ova činjenica je osnova principa dokazivanja kontradikcijom!

To je od velikog značaja jer gotovo svaka teorema je neka implikacija

Teorema: „Ako je to i to, onda je to i to"

Logička operacija ekvivalencija označena je sa $\Leftrightarrow$ i iskaz $p \Leftrightarrow q$ je tačan ako i samo ako su iskazi p i q takvi da su istovremeno oba tačna ili oba netačna.

Sada se može dokazati (proverom sva četiri moguća slučaja) još jedan, vrlo važan i često korišćen logički zakon – kontrapozicija, tj. $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$, jer se u nekim primerima mnogo lakše dokazuje $\neg q \Rightarrow \neg p$ nego $p \Rightarrow q$. **Na osnovu prethodnih pasusa i definicije implikacije, sledi da jedini slučaj kada je prva implikacija netačna jeste $p = \top$ i $q = \perp$, a isto važi i za drugu implikaciju.** To znači da je iskaz $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$ uvek tačan, tj. tautologija. Može se primetiti da je ovim izveden dokaz bez korišćenja tablice istinitosti, odnosno proveravanjem sva četiri slučaja!

„Dokazati" ovaj zakon kontrapozicije sledećim primerom:

Ako je bolestan, onda ima temperaturu.

isto je što i

Ako nema temperaturu, onda nije bolestan.

Treba primetiti da je ovaj zakon kontrapozicije, u stvari, onaj metod dokazivanja kontradikcijom!
Ovakvo učenje logike, bez tablica istinitosti, najispravniji je način učenja. Proveriti sve tautologije koje slede, na ovakav, isti način, bez tablica istinitosti!

$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
$p \wedge p \Leftrightarrow p$	$p \vee p \Leftrightarrow p$
$p \wedge \bot \Leftrightarrow \bot$	$p \vee \top \Leftrightarrow \top$
$p \vee \bot \Leftrightarrow p$	$p \wedge \top \Leftrightarrow p$
$p \vee \neg p \Leftrightarrow \top$	$p \wedge \neg p \Leftrightarrow \bot$
$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$	$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$	$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$	$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$
$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$	$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$

Ovo je samo kratak osvrt na matematičku logiku, iskaznu algebru, odnosno na ovozemaljsku ljudsku logiku.

Ako element x pripada skupu S, to će se zapisivati sa $x \in S$, a ako element x ne pripada skupu S, zapisivaće se sa $x \notin S$. Konačan skup može se definisati zapisivanjem elemenata skupa koji se razdvajaju zarezom, a sve to stavlja se u vitičaste zagrade. Na primer, ako skup S sadrži samo elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tada se piše $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Skup S može se zapisati tako što se pronalazi neka karakterizacija, uslov, svojstvo π njegovih elemenata, koju ne poseduje nijedan element koji ne pripada skupu S. Ako $\pi(x)$ znači x zadovoljava uslov (osobinu) π, tada se zapis $S = \{x|\pi(x)\}$ čita: „S je skup svih takvih x, da x zadovoljava uslov π." Naravno, ovaj način zapisivanja skupova može se koristiti i za konačne skupove. Na primer: $\{x|2x - 3 = 0\} = \{\frac{3}{2}\}$, $\{x|x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{x|x \in \mathbb{Z} \wedge |x| < 2\} = \{-1, 0, 1\}$ itd. Skup koji nema elemenata naziva se prazni skup i označava se sa $\emptyset$. U svakom pojavljivanju nekih skupova, uvek se podrazumeva da postoji neki skup $\boldsymbol{U}$ kome pripadaju svi elementi svih skupova koji se razmatraju. Taj skup će se nazvati **univerzalan skup $\boldsymbol{U}$**. Skraćenica za „ako i samo ako" biće **„akko"** ili $\Leftrightarrow$.

Da bi svaka definicija bila korektna, mora imati oblik „ako i samo ako", pa kad se negde u definiciji napiše ako, podrazumeva se da je to **akko**, što je konvencija. Ako ispred iskaza koji zavisi od x nema nikakvog kvantifikatora, tada se podrazumeva da se piše kvantifikator $\forall x$.

Broj elemenata skupa A naziva se i kardinalni broj skupa A i označava sa $|A|$ ili $CardA$.

Slede neke osnovne definicije i teoreme bez dokaza.

Definicija 1.2 *Skupovi A i B jednaki su akko imaju iste elemente, tj.*

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x \in \boldsymbol{U})\ (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Definicija 1.3 *Skup A je podskup skupa B, u oznaci $A \subseteq B$, akko svaki element skupa A pripada skupu B, odnosno*

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in \boldsymbol{U})\ (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Ako je skup A podskup skupa B, kaže se da je B nadskup skupa A. Ako su $A \subseteq B$ i $A \neq B$, tada se kaže da je skup A pravi podskup skupa B, što se označava sa $A \subset B$. Očevidno je da je relacija $\subseteq$ antisimetrična, jer je $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$ (videti 2.11).

Definicija 1.4 *Unija skupova A i B, u oznaci $A \cup B$, jeste skup kome pripadaju svi elementi skupa A, i svi elementi skupa B i drugih elemenata u skupu $A \cup B$ nema, to jest*

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}.$$

Definicija 1.5 *Presek skupova A i B, u oznaci $A \cap B$, jeste skup kome pripadaju svi elementi koji su i elementi skupova A i B i drugih elemenata u skupu $A \cap B$ nema, odnosno*

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}.$$

Ako je presek dvaju skupova prazan skup, za njih se kaže da su disjunktivni skupovi.

Definicija 1.6 *Razlika skupova A i B, u oznaci $A\backslash B$, skup je svih elemenata skupa A koji ne pripadaju skupu B, to jest*

$$A\backslash B = \{x|x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Definicija 1.7 *Komplement skupa A u odnosu na skup $\boldsymbol{U}$, u oznaci $\overline{A}$ ili A^c, jeste skup svih elemenata skupa $\boldsymbol{U}$ koji ne pripadaju skupu A, odnosno*

$$A^c = \overline{A} = \boldsymbol{U}\backslash A = \{x|x \in \boldsymbol{U} \wedge x \notin A\}.$$

Jasno je da važi $|\overline{A}| = |\boldsymbol{U}| - |A|$ jer $A \cap B = \emptyset \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$.

Definicija 1.8 *Simetrična diferencija skupova A i B, u oznaci $A + B$ ili $A \oplus B$, jeste skup svih elemenata iz unije skupova A i B koji ne pripadaju njihovom preseku, to jest*

$$A \oplus B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Na osnovu tautologija iz prethodne tabele automatski sledi tabela o odgovarajućim zakonima u teoriji skupova, gde su A, B i C podskupovi nekog univerzalnog skupa $\boldsymbol{U}$, odnosno $\overline{A} = \boldsymbol{U} \setminus A$.

$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}$
$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \boldsymbol{U} = A$
$A \cup \overline{A} = \boldsymbol{U}$	$A \cap \overline{A} = \emptyset$
$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
$\overline{\overline{A}} = A$	$A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$
$A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{A} \cup B = \boldsymbol{U}$	$\neg(A \subseteq B) \Leftrightarrow A \cap \overline{B} \neq \emptyset$

Videti definiciju 4.1, primer 4.3 i teoreme od 4.5 do 4.13.

Definicija 1.9 *Partitivni skup skupa A, u oznaci $\mathcal{P}(A)$, skup je svih podskupova skupa A, to jest*

$$\mathcal{P}(A) = \{X|X \subseteq A\}.$$

Na primer, ako je $A = \{1,2,3\}$, tada partitivni skup skupa A je

$$\mathcal{P}(A) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\Big\}.$$

Nemojte pojam partitivog skupa da pomešate sa pojmom particije skupa! Sve particije skupa $\{1,2,3\}$ su:
$\Big\{\{1,2,3\}\Big\}$,$\Big\{\{1,2\},\{3\}\Big\}$,$\Big\{\{1,3\},\{2\}\Big\}$,$\Big\{\{2,3\},\{1\}\Big\}$,$\Big\{\{1\},\{2\},\{3\}\Big\}$

Kroz sledeća dva primera i teoreme postepeno će se prikazati čuvena formula uključenja – isključenja, koja je za $k = 2$ i $k = 3$ poznata još iz osnovne škole!

Primer 1.10 *Za bilo koje podskupove A_1, A_2, A_3 i A_4 skupa A važi:*
$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$;

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = {} & |A_1| + |A_2| + |A_3| \\ & - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = {} & |A_1|+|A_2|+|A_3|+|A_4| \\ & -|A_1 \cap A_2|-|A_1 \cap A_3|-|A_1 \cap A_4|-|A_2 \cap A_3|-|A_2 \cap A_4|-|A_3 \cap A_4| \\ & +|A_1 \cap A_2 \cap A_3|+|A_1 \cap A_2 \cap A_4|+|A_1 \cap A_3 \cap A_4|+|A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ & - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|.\end{aligned}$$

Teorema 1.11 *Neka su $A_1, A_2, \cdots, A_k$ proizvoljni podskupovi skupa A_0. Ako je $|A_0| = a_0$, $|A_{j_1}| = a_1$, $|A_{j_1} \cap A_{j_2}| = a_2$, $|A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap A_{j_3}| = a_3$, $|A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap A_{j_3} \cap A_{j_4}| = a_4, \cdots$ $\cdots, |A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_i}| = a_i$, za svaku permutaciju $(j_1, j_2, \cdots, j_k)$ skupa $\{1, 2, \cdots, k\}$, tada je $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \binom{k}{i} a_i$.*

Drugim rečima, skupovi $A_1, A_2, \cdots, A_k$ imaju isti broj elemenata $a_1 = |A_1| = \cdots = |A_k|$, kao i broj elemenata preseka bilo kojih „i" skupova iz $A_1, A_2, \cdots, A_k$ uvek je isti broj a_i, za svako i.

Dokaz teoreme 1.11 indukcijom je vrlo jednostavan. Dokažite sami! U dokazu se jedino koristi $\binom{k}{r} + \binom{k}{r+1} = \binom{k+1}{r+1}$.

Teorema 1.12 *Pod uslovima prethodne teoreme i zbog njenog tvrđenja važi:*

$$|\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_k}| = |\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_k}| = |A_0| - |A_1 \cup \cdots \cup A_k| = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} a_i$$

$$\text{ili „malo kraće"} \left|\bigcap_{i=1}^{k} \overline{A_i}\right| = \left|\overline{\bigcup_{i=1}^{k} A_i}\right| = |A_0| - \left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} a_i$$

Teorema 1.12 neposredna je posledica Demorganovog zakona, teoreme $|\overline{S}| = |U| - |S|$, i teoreme 1.11, gde je $\overline{S} = U \setminus S$ komplement skupa S u odnosu na skup U i, naravno, $S \subseteq U$. U našem primeru je $S = A_1 \cup \cdots \cup A_k$ i $U = A_0$.

Definicija 1.13 *Particija (podela ili razbijanje) skupa A, skup je nepraznih podskupova skupa A, od kojih su svaka dva disjunktivna (nemaju zajedničke elemente, tj. presek im je prazan skup), a njihova je unija ceo skup A. Svaka particija određuje tačno jednu relaciju ekvivalencije.*

Broj svih particija nekoga skupa od n elemenata jednak je broju svih mogućih raspoređivanja n kuglica koje se RAZLIKUJU u najviše n kutija koje se NE RAZLIKUJU i jednak je broju svih relacija ekvivalencije n-točlanog skupa. Neke kutije mogu biti i prazne! Na primer, ako su sve kuglice u jednoj kutiji, to je samo jedna mogućnost!

Definicija 1.14 *Tip particije skupa A od n elemenata na k podskupova je uređena k-torka prirodnih brojeva u neopadajućem poretku, čija je svaka komponenta broj elemenata nekog podskupa u toj particiji. Očevidno je da zbir komponenata ove k-torke je n.*

Koliko tipova particija ima šestočlani skup?

Ako skup A ima n elemenata, tada se broj svih particija skupa A na k podskupova obeležava sa S_k^n i naziva se Stirlingov broj. Sada je jasno da je broj svih particija skupa od n elemenata jednak $S_1^n + S_2^n + \cdots + S_n^n$.

Na primer, sve particije skupa $\{1, 2, 3\}$, odnosno sva raspoređivanja tri različite kuglice u najviše tri kutije koje se ne razlikuju, jesu $\Big\{\{1,2,3\}\Big\}, \Big\{\{1,2\},\{3\}\Big\}, \Big\{\{1,3\},\{2\}\Big\}, \Big\{\{2,3\},\{1\}\Big\}, \Big\{\{1\},\{2\},\{3\}\Big\}$ i njhov broj je $S_1^3 + S_2^3 + S_3^3 = 1 + 3 + 1 = 5$.

Napisati sve particije skupa $\{1, 2, 3, 4\}$, kojih ima $S_1^4 + S_2^4 + S_3^4 + S_4^4 = 1 + 7 + 6 + 1 = 15$.

Na primer, $\Big\{\{1,2,3,4,5\}\Big\}$, $\Big\{\{1,2\},\{3,4,5\}\Big\}$, $\Big\{\{1\},\{2\},\{3,4,5\}\Big\}$, tri su ilustracije particije skupa $\{1,2,3,4,5\}$, kojih ima ukupno $S_1^5 + S_2^5 + S_3^5 + S_4^5 + S_5^5 = 1 + 15 + 25 + 10 + 1 = 52$, a $\Big\{\{1,2,3,4,5,6\}\Big\}$, $\Big\{\{1,2\},\{3,4,5,6\}\Big\}$, $\Big\{\{1\},\{2,6\},\{3,4,5\}\Big\}$, $\Big\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\Big\}$ i particija $\Big\{\{1,5\},\{3,6\},\{2,4\}\Big\}$ su nekih pet primera particija skupa $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, kojih ima ukupno $S_1^6 + S_2^6 + S_3^6 + S_4^6 + S_5^6 + S_6^6 = 1 + \binom{6}{5} + \binom{6}{4} + \binom{6}{3}\frac{1}{2!} + \binom{6}{4} + \binom{6}{3}\binom{3}{2} + \binom{6}{2}\binom{4}{2}\frac{1}{3!} + \binom{6}{3} + \binom{6}{2}\binom{4}{2}\frac{1}{2!} + \binom{6}{2} + 1 = 203$ i ima 11 sabiraka jer ima 11 tipova svih mogućih particija skupa A u odnosu na broj elemenata u podskupovima tih particija i to su: (6),(1,5),(2,4), (3,3),(1,1,4),(1,2,3), (2,2,2),(1,1,1,3),(1,1,2,2),(1,1,1,1,2),(1,1,1,1,1,1) (videti 1.14). Prema tome, broj svih particija, a time i broj svih relacija ekvivalencije u skupovima koji imaju 1, 2, 3, 4, 5 i 6 elemenata je redom 1, 2, 5, 15, 52 i 203 (videti definiciju 2.12)

Ako se kaže „dat je skup $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ od n elemenata" podrazumeva se da su svaka dva među njima različita.

Poglavlje 2

RELACIJE

Binarna relacija, odnosno bilo koji skup uređenih parova, jedan je od osnovnih pojmova matematike neophodan u svima njenim oblastima i u mnogim drugim naukama. Bez pojma relacije nemoguće je definisati mnoge matematičke objekte i razumeti druge oblasti matematike i nauke. U cilju lakšeg i boljeg razumevanja, ukratko će se reći nešto o relacijama i ilustrovati odgovarajućim primerima.

Uređen par se označava sa (a, b) i razlikuje se od dvočlanog skupa $\{a, b\}$ samo po tome što je za uređen par bitan redosled, tj. ko je prvi a ko drugi element para, dok kod dvočlanog skupa redosled nije bitan, pa je, na primer, $(2,3) \neq (3,2)$ dok je $\{2,3\} = \{3,2\}$.

Evo i precizne matematičke definicije uređenog para, koja nije neophodna, ali nije loše pročitati je, zbog matematičke pismenosti i konstatovati da ona govori potpuno isto što i prethodni pasus.

Definicija 2.1 *Uređen par elemenata a i b u oznaci* (a, b) *skup je* $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ *tj.* $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. *Element a naziva se prva komponenta, a element b druga komponenta para* (a, b).

Teorema 2.2 *Uređeni parovi* (a, b) *i* (c, d) *jednaki su akko je* $a = c$ *i* $b = d$.

Dokaz Ako su $a = c$ i $b = d$, tada je očevidno $(a, b) = (c, d)$. Neka je sada $(a, b) = (c, d)$, tj. $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. Kako postoji jednakost dva dvočlana skupa, postoje i dve mogućnosti. Prva je $\{a\} = \{c\}$ i $\{a, b\} = \{c, d\}$, a druga $\{a\} = \{c, d\}$ i $\{a, b\} = \{c\}$. Na osnovu definicije jednakosti dva skupa u prvom je slučaju $a = c$ i $b = d$, u drugom $a = c = d = b$.

Treba primetiti da je teorema 2.2, u stvari, ekvivalentna definiciji 2.1.

Drugim rečima, može se reći da je uređen par dvočlani skup kod kojeg je bitno ko je prvi a ko drugi element.

Definicija 2.3 *Uređena trojka elemenata a, b i c, što se označava sa (a, b, c), jeste $((a, b), c)$, to jest*

$$(a, b, c) = ((a, b), c).$$

Dalje se rekurzivno definiše uređena n-torka, tj. niz dužine n:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = ((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n) \text{ za } n = 3, 4, \ldots$$

Funkcija $\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ \ldots\ n \\ a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \end{pmatrix}$, niz $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$,
uređena n-torka $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$
i reč $a_1 a_2 a_3 \ \ldots \ a_n$ dužine n
su ekvivalentni pojmovi!

Definicija 2.4 *Dekartov proizvod skupova A i B u oznaci $A \times B$, skup je svih uređenih parova čija prva komponenta pripada skupu A, a druga skupu B, odnosno*

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}.$$

Na primer, ako su $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{x, y\}$, tada je $A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}$. Ako se u prethodnoj definiciji uzme da je $A = B$, dobija se $A \times A$, što se označava sa A^2 i čita „Dekartov kvadrat skupa A". Analogno tome A^n je skup svih uređenih n-torki čiji su elementi iz skupa A i naziva se n-ti Dekartov stepen skupa A. Na primer, ako su $A = \{0, 1\}$ i $B = \{1, 2, 3\}$, tada je $A^3 =$

$$= \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}.$$

$$B^2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}.$$

Treba primetiti razliku između skupova i uređenih n-torki. Na primer, $(x, x, y) \neq (x, y, x)$ dok je $\{x, x, y\} = \{x, y, x\} = \{y, x, x\} = \{x, y\}$.

Definicija 2.5 *Binarna relacija ρ je bilo koji skup uređenih parova. Skup svih prvih komponenti relacije ρ označavaće se sa $\mathcal{D}(\rho)$, a skup svih drugih komponenti sa $\mathcal{A}(\rho)$.*

Definicija 2.6 *Binarna relacija ρ je relacija skupa A akko je skup A skup svih prvih i drugih komponenti skupa ρ ili njegov nadskup, odnosno akko je $\mathcal{D}(\rho) \cup \mathcal{A}(\rho) \subseteq A$.*
Ako nije zadat skup A, podrazumeva se da je $A = \mathcal{D}(\rho) \cup \mathcal{A}(\rho)$.

Definicija 2.7 *Binarna relacija ρ skupa A je bilo koji podskup od A^2, odnosno $\rho \subseteq A^2$.*

Prethodne dve definicije su ekvivalentne jer važi sledeća lema.

Lema 2.8 *Ako je ρ skup uređenih parova, $\mathcal{D}(\rho)$ skup svih prvih komponenti od ρ i $\mathcal{A}(\rho)$ skup svih drugih komponenti od ρ, tada je*

$$\rho \subseteq A^2 \Leftrightarrow \mathcal{D}(\rho) \cup \mathcal{A}(\rho) \subseteq A.$$

Na primer, u skupu $A = \{1, 2, 3\}$ posmatrati relacije

$$\rho_1 = \{(1,2), (1,3), (2,3)\} \text{ i } \rho_2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,3)\}.$$

Relacija ρ_1 je relacija $<$ („manje od") u skupu {1,2,3}. Uobičajeno je da se umesto $(x, y) \in \rho_1$ piše $x\rho_1 y$, u prethodnom primeru umesto $(1,2) \in <$ piše se i $1 < 2$. Relacija ρ_2 je relacija „deli", koja se označava sa $|$ pa je $(1,2) \in \rho_2 \Leftrightarrow (1,2) \in | \Leftrightarrow 1|2$, što znači 1 deli 2.

Još jednom istaknimo:

Binarna relacija je SAMO sinonim za skup uređenih parova!

Ako je ρ binarna relacija (skup uređenih parova) skupa A, tada je A skup svih prvih i drugih komponenti od ρ ili neki njegov nadskup, pa je onda očevidno da je $\rho \subseteq A^2$.

Definicija 2.9 *Relacija inverzna relaciji ρ označava se sa ρ^{-1} i ona je $\rho^{-1} = \{(x, y) | (y, x) \in \rho\}$.*

Za relacije ρ_1 i ρ_2 iz prethodnog primera imamo
$\rho_1^{-1} = \{(2,1), (3,1), (3,2)\}$ i $\rho_2^{-1} = \{(1,1), (2,1), (3,1), (2,2), (3,3)\}$, odnosno ρ_1^{-1} jeste relacija „veće od" (ρ_1^{-1}je $>$) i ρ_2^{-1} jeste relacija „deljiv je sa" u skupu $\{1, 2, 3\}$.

Definicija 2.10 $\boxed{x\ \rho\ y \overset{def}{\Leftrightarrow} (x,y) \in \rho}$ $\boxed{\neg(x\ \rho\ y) \overset{def}{\Leftrightarrow} (x,y) \notin \rho}$

Definicija 2.11 *Relacija ρ skupa A je:*

refleksivna	(R)	$\Leftrightarrow$	$(\forall x \in A)$	$x \,\rho\, x$
simetrična	(S)	$\Leftrightarrow$	$(\forall x, y \in A)$	$x \,\rho\, y \Rightarrow y \,\rho\, x$
antisimetrična	(A)	$\Leftrightarrow$	$(\forall x, y \in A)$	$(x \,\rho\, y \wedge y \,\rho\, x) \Rightarrow x = y$
tranzitivna	(T)	$\Leftrightarrow$	$(\forall x, y, z \in A)$	$(x \,\rho\, y \wedge y \,\rho\, z) \Rightarrow x \,\rho\, z$
funkcija	(F)	$\Leftrightarrow$	$(\forall x, y, z \in A)$	$(x \,\rho\, y \wedge x \,\rho\, z) \Rightarrow y = z$

Neka su u skupu $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ definisane relacije

$$\rho_1 = \{(1,2), (3,5), (4,2), (1,5), (3,2), (1,3), (4,3)\}, \ \rho_2 = \{(1,1), (2,2)\}$$

$$\rho_3 = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)\}.$$

Relacija ρ_1 nije refleksivna jer, na primer, $(1,1) \notin \rho_1$, nije ni simetrična jer $(1,2) \in \rho_1$, a $(2,1) \notin \rho_1$, jeste antisimetrična, jer za svaki par od ρ_1 čije su komponente različite važi da njemu simetričan par nije element od ρ_1 i nije tranzitivna jer $(4,3) \in \rho_1 \wedge (3,5) \in \rho_1$ ali par $(4,5) \notin \rho_1$, nije funkcija jer se original 1 preslikava u dve različite slike. Relacija ρ_2 je simetrična, antisimetrična i tranzitivna, a nije refleksivna jer, na primer $(3,3) \notin \rho_2$ i jeste funkcija. Relacija ρ_3 nije simetrična, nije funkcija zbog $(1,2), (1,3) \in \rho_3$ i nije refleksivna, a jeste antisimetrična i jeste tranzitivna. Kao što se iz ovih primera vidi, relacija je simetrična i antisimetrična ako i samo ako za svaki njen par važi da su njegove komponente jednake. Ako se pojavi par čije su komponente različite, tada simetrija zahteva da njemu simetričan par pripada relaciji, dok antisimetrija zahteva da taj par ne pripada relaciji. Iz ovoga se može zaključiti da je ekvivalentna definicija antisimetričnosti

$$(\forall x, y \in A) \ \Big(\big((x, y) \in \rho \wedge x \neq y \big) \Rightarrow (y, x) \notin \rho \Big) \ \textit{Videti } 1.1.$$

Drugim rečima, antisimetričnost neke relacije proverava se posmatranjem samo parova te relacije (ukoliko ih ima) čije su komponente različite i za svaki takav par (x, y) treba da važi da (y, x) ne pripada toj relaciji. U protivnom relacija nije antisimetrična.

Ako relacija ne sadrži nijedan par čije su komponente različite, tada je ona i simetrična i antisimetrična.

Dokazati da je to jedini slučaj kada je relacija i simetrična i antisimetrična!

Definicija 2.12 *Relacija $\rho \subseteq A^2$ relacija je ekvivalencije akko je refleksivna, simetrična i tranzitivna, odnosno* RST. *Videti* 1.13.

Relacija $\rho = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$,je RST u skupu $A = \{1,2,3,4\}$. Particija $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$ skupa A jednoznačno određuje relaciju ρ tako što su dva elementa u relaciji ρ akko su iz istog podskupa pomenute particije, kao i obratno.

Definicija 2.13 *Neka je relacija $\rho \subseteq A^2$ relacija ekvivalencije. Tada se skup $C_x = \{y | x \ \rho \ y \wedge y \in A\}$ naziva klasa ekvivalencije elementa $x \in A$ s obzirom na $\rho \subseteq A^2$. Skup svih klasa naziva se faktor skup ili količnički skup i označava sa A/ρ.*

Klase ekvivalencije su neprazni skupovi jer je $x \in C_x$ zbog refleksivnosti relacije i definicije 2.13.

Teorema 2.14 *Ako je ρ relacija ekvivalencije skupa A, tada je*

$$(\forall x, y \in A) \ \ (x \ \rho \ y \Leftrightarrow C_x = C_y).$$

Dokaz ($\Rightarrow$) Neka je $x \ \rho \ y$. Tada iz $z \in C_x$ sledi $x \ \rho \ z$, a dalje $(x \ \rho \ y \wedge x \ \rho \ z) \Rightarrow (y \ \rho \ x \wedge x \ \rho \ z) \Rightarrow y \ \rho \ z \Rightarrow z \in C_y$, odnosno $C_x \subseteq C_y$. Analogno se dokazuje i da je $C_y \subseteq C_x$, pa je $C_x = C_y$.

($\Leftarrow$) Neka je $C_x = C_y$. Iz $x \in C_x$ i $C_x = C_y$ sledi $x \in C_y$, a odatle, po definiciji 2.13 sledi $y \ \rho \ x$, odnosno $x \ \rho \ y$.

Teorema 2.15 *Neka su C_x i C_y klase ekvivalencije skupa A s obzirom na relaciju ekvivalencije ρ. Tada je*

$$C_x \cap C_y = \emptyset \ \ \textit{ili} \ \ C_x = C_y.$$

Dokaz Ako je $C_x \cap C_y = \emptyset$ tvrđenje teoreme je tačno. Pretpostavimo da je $C_x \cap C_y \neq \emptyset$. Tada postoji $z \in A$ tako da je $z \in C_x \cap C_y$ tj. $z \in C_x$ i $z \in C_y$, odakle sledi $x \ \rho \ z \wedge y \ \rho \ z$, odnosno $x \ \rho \ z \wedge z \ \rho \ y$, što zbog tranzitivnosti daje $x \ \rho \ y$, a na osnovu prethodne teoreme sledi $C_x = C_y$, pa je tvrđenje teoreme opet tačno.

Na osnovu 1.13, 2.13, 2.14 i 2.15 sledi da svaka relacija ekvivalencije ρ definisana u skupu A obavlja particiju tog skupa, tj. jednoznačno određuje neke neprazne podskupove skupa A, od kojih su svaka dva disjunktna a njihova unija je skup A. Očevidno važi i obratno. Ako postoji neka particija skupa A, tada se definiše relacija ρ u skupu A tako da su proizvoljna dva elementa u toj relaciji ako i samo ako pripadaju istom podskupu te particije.

Ovako definisana ρ je očevidno relacija ekvivalencije. Na primer, relaciji $\rho_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$ skupa $A = \{1,2,3,4,5\}$ jednoznačno odgovara particija (faktor skup ili skup svih klasa ekvivalencije) $\Big\{\{1,2\},\{3,4\},\{5\}\Big\}$ jer klase ekvivalencije su $C_1 = \{1,2\}$, $C_2 = \{1,2\}$, $C_3 = \{3,4\}$, $C_4 = \{3,4\}$, $C_5 = \{5\}$, kad naravno važi $C_1 = C_2$ i $C_3 = C_4$. Relaciji $\rho_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$ odgovara particija $\Big\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\Big\}$ i na kraju, relaciji $\rho_3 = A^2$ odgovara particija $\Big\{\{1,2,3,4,5\}\Big\}$. Poslednje dve particije nazivaju se trivijalne particije. U nekom konačnom skupu A može se definisati toliko relacija ekvivalencije koliko ima particija skupa A. Ako je skup $A = \{1,2,3\}$, tada postoje particije

$\Big\{\{1\},\{2\},\{3\}\Big\}$, $\Big\{\{1,2\},\{3\}\Big\}$, $\Big\{\{1,3\},\{2\}\Big\}$, $\Big\{\{1\},\{2,3\}\Big\}$, i $\Big\{\{1,2,3\}\Big\}$,

što znači da u skupu od tri elementa od ukupno $2^{3^2} = 2^9 = 512$ binarnih relacija, samo pet su relacije ekvivalencije. Videti 1.13

Iz teorema 2.14 i 2.15 sledi da je svaka klasa ekvivalencije jednoznačno određena bilo kojim svojim predstavnikom, što će biti važna činjenica u daljem radu.

Zadatak 2.16 *U skupu celih brojeva $\mathbb{Z} = \{\ldots -2,,-1,0,1,2,\ldots\}$ definisana je relacija ρ $(\equiv_3)$ na sledeći način. Celi brojevi x i y su u relaciji ρ akko imaju iste ostatke pri deljenju sa 3, što je ekvivalentno sa $x-y$ je deljivo sa 3. Dokazati da je ρ* RST *i naći faktor skup.*

Rešenje Refleksivnost je očevidna, simetričnost sledi iz činjenice da ako x i y imaju iste ostatke pri deljenju sa 3, onda y i x takođe imaju iste ostatke pri deljenju sa 3. Ako x i y imaju iste ostatke pri deljenju sa 3, y i z imaju iste ostatke pri deljenju sa 3 onda i x i z imaju iste ostatke pri deljenju sa 3, pa je relacija i tranzitivna, odnosno relacija ρ je RST relacija. Oznaka za $x\rho y$ odnosno za $(x,y) \in \rho$ je $x \equiv y (mod\, 3)$ ili $x \equiv_3 y$. Faktor skup, količnički skup, jeste skup svih klasa ekvivalencije $\mathbb{Z}/\rho = \mathbb{Z}_{\equiv_3} = \mathbb{Z}_3 = \Big\{\{3k | k \in \mathbb{Z}\}$, $\{3k+1 | k \in \mathbb{Z}\}$, $\{3k+2 | k \in \mathbb{Z}\}\Big\} = \{C_0, C_1, C_2\}$. Kako je svaka klasa ekvivalencije jednoznačno određena bilo kojim svojim predstavnikom, to je $C_0 = C_3 = C_{12} = C_{-3} = \ldots$, $C_1 = C_4 = C_7 = C_{-2} = \ldots$ i $C_2 = C_5 = C_8 = C_{-1} = \ldots$. Videti 5.60

U daljem radu često će se umesto oznaka C_0, C_1 i C_2 pisati 0, 1 i 2. Očevidno je da sve to važi i ako se umesto 3 uzme bilo koji prirodni broj

n, pa $\mathbb{Z}_{\equiv_n} = \mathbb{Z}_n = \{C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}\} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ jeste skup klasa ostataka po modulu n.

Sledeća slika ilustruje istovremeno i skupove $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z}/\rho = \mathbb{Z}_3$.

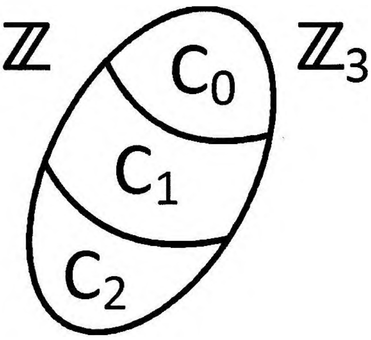


Figure 2.1: Klase ekvivalencije u odnosu na ρ

Zadatak 2.17 *U skupu P svih pravih neke ravni definisane su relacije α i β:*

$$(\forall a, b \in \mathcal{P}) \ (a\, \alpha\, b \ \Leftrightarrow \ a \cap b = \emptyset),$$

$$(\forall a, b \in \mathcal{P}) \ (a\, \beta\, b \ \Leftrightarrow \ a \cap b = \emptyset \vee a = b).$$

Ispitati refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost relacija α i β i opisati faktor skup kad je neka od njih relacija ekvivalencije.

Rešenje Relacija α nije refleksivna. Dokazati kontradikcijom da relacija α nije tranzitivna. Neka su a i b različite paralelne prave. Tada je $a\, \alpha\, b \wedge b\, \alpha\, a$, što zbog tranzitivnosti implicira $a\, \alpha\, a$, odnosno $a \cap a = \emptyset$, što je kontradikcija. Simetrična jeste. Relacija β je RST i naziva se relacija paralelnosti. Klase ekvivalencije s obzirom na ovu relaciju nazivaju se pravci, a pravac je skup svih međusobno paralelnih pravi.

Definicija 2.18 *Relacija $\rho \subseteq A^2$ je relacija poretka ako i samo ako je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna. Uređen par (A, ρ) je parcijalno uređen skup ili uređen skup, akko je A neprazan skup i ρ relacija poretka skupa A.*

Kao i relacije ekvivalencije tako i relacije poretka igraju veliku ulogu u svim oblastima matematike i mnogim drugim naukama. U parcijalno uređenom skupu definišu se mnogi novi pojmovi neophodni u raznim daljim proučavanjima. Uvešće se i pojmovi koji su dati u sledećoj definiciji.

Definicija 2.19 *Neka je* ρ relacija poretka *skupa* A. *Tada je element* a *iz skupa* A:

$$\begin{array}{rcl} \textit{najmanji element skupa } A & \Leftrightarrow & (\forall x \in A)\ a\,\rho\,x \\ \textit{najveći element skupa } A & \Leftrightarrow & (\forall x \in A)\ x\,\rho\,a \\ \textit{minimalni element skupa } A & \Leftrightarrow & \neg\Big((\exists x \in A)\ (x\,\rho\,a \wedge x \neq a)\Big) \\ \textit{maksimalni element skupa } A & \Leftrightarrow & \neg\Big((\exists x \in A)\ (a\,\rho\,x \wedge x \neq a)\Big). \end{array}$$

Drugim rečima, za element a važi:

a je najmanji akko je u relaciji sa **svakim** elementom
a je najveći akko je **svaki** element u relaciji sa njim
a je minimalni akko **niko nije** u relaciji sa njim osim njega samoga
a je maksimalni akko **ni sa kim nije u relaciji** osim sa samim sobom

Definicija 2.20 *Elementi* a *i* b *uporedivi su s obzirom na relaciju poretka* $\rho \subseteq A^2$ *ako i samo ako je* $a\,\rho\,b$ *ili* $b\,\rho\,a$.

Definicija 2.21 *Ako su u parcijalno uređenom skupu svaka dva elementa uporediva, tada se kaže da je skup totalno uređen ili lanac.*

Definicija 2.22 *Parcijalno uređen skup u kome svaki neprazan podskup ima najmanji element naziva se dobro uređen skup.*

Definicija 2.23 *Neka je* ρ *relacija poretka u skupu* A. *Ako je* $a\,\rho\,b$ *i* $a \neq b$, *tada se kaže* a *je* **ispod** b *ili* b *je* **iznad** a. *Ako je* $a\,\rho\,b$ *i* $b\,\rho\,c$, *gde su svaka dva elementa iz* $\{a, b, c\}$ *međusobno različita, reći će se da je* b **između** a *i* c. *Ako između različitih elemenata* a *i* b *ne postoji nijedan element i ako je* $a\,\rho\,b$, *tada se kaže da je* a **neposredno ispod** b *ili da je* b **neposredno iznad** a.

Samo za relacije poretka definiše se HASEOV DIJAGRAM.

Definicija 2.24 *Haseov dijagram* relacije poretka ρ *skupa* A *je graf čiji su čvorovi elementi skupa* A. *U grafu ne postoje „horizontalne grane". Ako je* $a\,\rho\,b$, *tada je tačka* b *„iznad" tačke* a. *Grana (duž), čije su krajnje tačke (čvorovi)* a *i* b, *jeste rastuća od* a *do* b, *ako i samo ako je* $a\,\rho\,b$, $a \neq b$ *i ako između* a *i* b *nema nijednog elementa (definicija* 2.23). *Rastuća putanja od* a *do* b *postoji akko je* $a\,\rho\,b$. *Ako* a *nije u relaciji sa* b, *tada ne postoji rastuća putanja od* a *do* b.

Definicija 2.25 *Konačno parcijalno uređenje* (A, ρ) **rangirano** *je akko za svaki* $(a, b) \in \rho$ *važi da su svi rastući putevi od* a *do* b *iste dužine.*

Definicija 2.26 *Ovo je definicija spratova (rangova, nivoa) u konačnim* **rangiranim** *Haseovim dijagramima koji se označavaju sa* $\mathcal{H}$.

Uočimo deo (podskup čvorova) $\mathcal{G}$ *Haseovog dijagrama (grafa) takav da za svaka dva elementa (čvora) iz* $\mathcal{G}$ *postoji put od jednog do drugoga i za svaki element (čvor) van toga skupa* $\mathcal{G}$ *ne postoji put od njega do bilo koga elementa iz tog dela* $\mathcal{G}$ *Haseovog dijagrama. Ovaj podskup* $\mathcal{G}$ *se zove komponenta povezanosti grafa* $\mathcal{H}$. *Daćemo definiciju za* $\mathcal{G}$, *a to je onda definicija i za* $\mathcal{H}$, *jer je* $\mathcal{H}$ *unija svih svojih komponenti povezanosti.*

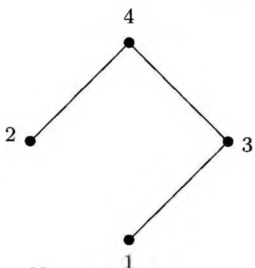
Postoji minimalni element koji je na prvom spratu.

Ako postoji rastuća duž ab *u* $\mathcal{G}$, *tada su* a *i* b *na susednim spratovima, to jest čvor* a *je na spratu* $k \in \mathbb{N}$, *a čvor* b *na spratu* $k + 1$.

Ako postoji put dužine n *od minimalnog elementa na prvom spratu do elementa* a *i ako se sastoji od* r *rastućih grana i* o $(o < r)$ *opadajućih grana (naravno da je* $n = r + o$*), tada je* a *na nivou (spratu)* $r + 1 - o$.

Neki minimalni elementi moraju biti na prvom nivou (spratu), a može biti minimalnih elemenata koji su i na višim nivoima, kao 2 u sledećem primeru, koji je na drugom nivou.

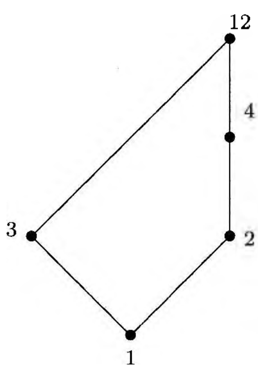
Na primer, ako je ℓ *dužina rastućeg puta od nekog minimalnog elementa s prvog nivoa do elementa* a, *tada je element* a *na nivou (spratu)* $\ell + 1$.



Neka je u skupu $A = \{1, 2, 3, 4\}$ definisana relacija $\rho = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,3), (1,4), (2,4), (3,4)\}$, tada su minimalni elementi 1 i 2, maksimalni i najveći samo 4, a najmanji ne postoji. Na prvom spratu je 1, na drugom su 2 i 3, a na trećem spratu samo 4.

Naravno, sve ovo se odnosi samo na relacije poretka, a sparatovi (nivoi, rangovi) postoje samo ako su rangirane relacije poretka!

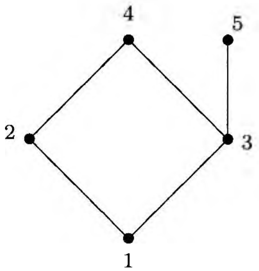
Evo primera relacije poretka koja nije rangirana. Neka u skupu $A = \{1, 2, 3, 4, 12\}$ razmatramo relaciju „deli" i označimo je sa ρ. Drugim rečima
$\rho = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,12), (2,2), (2,4), (2,12), (3,3), (3,12), (4,4), (4,12), (12,12)\}$.
Haseov dijagram ove relacije ρ dat je na slici 1. Sa slike se vidi da postoje dva puta različitih dužina od 1 do 12. To su 1, 2, 4, 12 i 1, 3, 12. Ovo je najmanja **nerangirana** relacija poretka, tj. može se pokazati da relacije poretka sa najviše 4 elementa su rangirane.



Slika 1.

Ako je A konačan parcijalno uređen skup, tada za svaki element $a \in A$ koji nije minimalni, postoji minimalni element $e \in A$, tako da postoji rastući put od e do a. Da li je e na prvom nivou?

Na primer, ako su $A = \{1,2,3,4,5\}$ i $\rho = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),$ $(5,5),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,4),(3,4),(3,5)\}$, tada je Haseov dijagram dat na slici 1. Na dijagramu 4 i 5 su na trećem spratu, 2 i 3 na drugom i minimalni element 1 na prvom spratu.



U ovom primeru najmanji element je 1, najveći ne postoji, minimalni je 1 i maksimalni 4 i 5. Skup elemenata prvoga nivoa je $\{1\}$, drugog $\{2,3\}$ i trećega nivoa $\{4,5\}$.

U Haseovom dijagramu očevidno je da je a u relaciji sa b, odnosno $a\,\rho\, b$ akko postoji bar jedna **stalno rastuća** putanja od a do b.

Nacrtati Haseove dijagrame (grafove) svih relacija poretka skupa od tri elementa, pri čemu čvorove grafa ostaviti neoznačene, što znači da isti Haseov dijagram predstavlja više relacija poretka! Tada ih ima samo pet, a inače ukupno relacija poretka ima 19.

Nacrtati Haseove dijagrame (grafove) svih relacija poretka skupa od 4 elementa, pri čemu čvorove grafa ostaviti neoznačene, što znači da isti Haseov dijagram predstavlja više relacija poretka! Tada ih ima samo 16, a inače ukupno relacija poretka ima 219. Uputstvo: Sve relacije poretka sa 4 elementa su rangirane, tako da možemo poređati čvorove po spratovima i tada crtati grane između čvorova susednih spratova.

Teorema 2.27 *Svaki dobro uređen skup je totalno uređen skup.*

Dokaz Neka su a i b dva proizvoljna elementa. Tada u podskupu $\{a,b\}$ postoji najmanji element (definicija 2.22) i neka je to, na primer, a. Sledi da je $a\,\rho\, b$.

Da li važi obratno tvrđenje teoreme?

Teorema 2.28 *Najmanji (najveći) element parcijalno uređenog skupa jedinstven je.*

Dokaz Pretpostavimo da postoje dva različita najmanja elementa a i b. Tada je $a\,\rho\, b$ jer je a najmanji element, ali i $b\,\rho\, a$ jer je b najmanji element, pa na osnovu antisimetričnosti sledi $a = b$. Naša pretpostavka ne važi, tj. važi tvrđenje teoreme. Slično se dokazuje i za najveći element.

Definicija 2.29 *Neka je A parcijalno uređen skup s obzirom na relaciju ρ i $M \subseteq A$. Tada je $a \in A$ donja granica skupa M akko je $a \, \rho \, m$ za svako $m \in M$, dok $a \in A$ je gornja granica skupa M akko je $m \, \rho \, a$ za svako $m \in M$. Skup M je ograničen akko postoje i donja i gornja granica. Ako $M \subseteq A$ ima gornju granicu, tada je* **sup** *M (supremum od M) najmanji element (ukoliko postoji) skupa gornjih granica S za M. Ako $M \subseteq A$ ima donju granicu, tada je* **inf** *M (infinum od M) najveći element (ukoliko postoji) skupa donjih granica za M.*

Neka je S skup svih gornjih granica podskupa M. Najmanji element skupa S (ukoliko postoji) supremum je podskupa M. Ako supremum pripada skupu M, kaže se da je on maksimum skupa M. Analogno je i za infinum i minimum.

Na primer, za otvoreni interval realnih brojeva $(0, 1)$ supremum je 1 a infinum 0, ali ne postoje minimum i maksimum, dok je za zatvoreni interval realnih brojeva $[0, 1]$ supremum opet 1 a infinum 0, ali oni su istovremeno i redom maksimum odnosno minimum, naravno sve za relaciju poretka $\leq$ u skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$.

Definicija 2.30 *Totalno uređen skup (A, ρ) diskretan je akko za svako $a \in A$ koje nije najmanji element postoji takav $b \in A$ da je $b \, \rho \, a$, $b \neq a$ i između njih (definicija 2.23) nema elemenata iz A i za svako $a \in A$ koje nije najveći element postoji takvo $b \in A$ da je $a \, \rho \, b$, $a \neq b$ i između njih nema elemenata iz A.*

Drugim rečima, totalno uređen skup je diskretan ako $a \in A$, koji nije najmanji, ima neposrednog prethodnika $b \neq a$ (element ispod njega) i $a \in A$, koji nije najveći, ima neposrednog sledbenika $c \neq a$ (element iznad njega).

Svaki konačni totalno uređen skup je diskretan, dok beskonačan može biti ili ne biti. Zaokružiti broj ispred diskretnih:

1. $(\mathbb{N}, |)$, **2.**$(\mathbb{N}, \leq)$ **3.**$(\mathbb{Z}, \leq)$ **4.** $(\mathbb{R}, \leq)$ **5.** $(\mathbb{Q}, \leq)$.

Zadatak 2.31 *Koliko najmanje elemenata mora imati skup A tako da se u njemu može definisati relacija ρ koja nije ni simetrična ni antisimetrična?*

Rešenje Može se pretpostaviti da relacija $\rho \subseteq A^2$ nije ni simetrična ni antisimetrična. Kako ρ nije simetrična, mora postojati takav par $(x, y) \in \rho$ da je $x \neq y$ i $(y, x) \notin \rho$. Kako ρ nije antisimetrična, mora postojati par simetričnih parova iz ρ čije su komponente različite, tj. $(\exists, q, b \in A)\ (a,b) \in \rho \wedge (b,a) \in \rho \wedge a \neq b$. Kako skupovi $\{a,b\}$ i $\{x,y\}$ očevidno mogu imati najviše jedan zajednički element, to je minimalni broj elemenata skupa A sa traženom osobinom $4-1=3$. Na primer, $A=\{1,2,3\}$ i $\rho = \{(1,2),(2,1),(1,3)\}$.

Zadatak 2.32 *U skupu* $\mathbb{E}^2$ *uređenih parova tačaka Euklidovog prostora* $\mathbb{E}$ *definisana je relacija* ρ *na sledeći način:*

$$(A,B)\ \rho\ (C,D) \Leftrightarrow (\exists \tau \in \mathcal{T})\ \tau(A,B) = (C,D)$$

gde je $\mathcal{T}$ *skup svih translacija prostora* $\mathbb{E}$. *Dokazati da je* ρ RST *i odrediti faktor skup.*

Rešenje Relacija je refleksivna jer funkcija koja svaki element iz $\mathbb{E}$ preslikava u taj isti element jeste translacija. Relacija ρ je simetrična jer za svaku translaciju τ (bijektivnu funkciju prostora $\mathbb{E}$ u prostor $\mathbb{E}$, koja svaku duž AB preslikava u njoj podudarnu paralelnu i isto orijentisanu duž $\big(\tau(A), \tau(B)\big)$ postoji njoj inverzna translacija τ^{-1} pa ako je $\tau(A,B)=(C,D)$, tada je $\tau^{-1}(C,D)=(A,B)$. Tranzitivnost relacije ρ sledi iz činjenice da kompozicija dve translacije jeste translacija. Znači ρ je RST. Klasa ekvivalencije je skup svih parova (orijentisanih duži) koji su međusobno paralelni, podudarni i isto orijentisani i naziva se slobodni vektor. Faktor skup, u odnosu na relaciju ρ, jeste skup svih slobodnih vektora.

Zadatak 2.33 *U skupu* $\mathbb{N}^2$ *uređenih parova čije su komponente iz skupa prirodnih brojeva* $\mathbb{N}$, *definisane su relacije* α *i* β *na sledeći način:*

$$(a,b)\ \alpha\ (c,d) \Leftrightarrow a+d=b+c \qquad (tj.\ a-b=c-d)$$
$$(a,b)\ \beta\ (c,d) \Leftrightarrow ad=bc \qquad \left(tj.\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\right)$$

Dokazati da su α *i* β RST *i odrediti faktor skupove* $\mathbb{N}^2/\alpha$ *i* $\mathbb{N}^2/\beta$.

Rešenje Refleksivnost i simetričnost obeju relacija slede iz komutativnosti sabiranja odnosno množenja u skupu prirodnih brojeva. Tranzitivnost relacije α sledi iz

$$((a,b)\alpha(c,d) \wedge (c,d)\alpha(e,f)) \Rightarrow (a+d=b+c \wedge c+f=d+e) \Rightarrow$$

$$a + d + c + f = b + c + d + e \Rightarrow a + f = b + e \Rightarrow (a, b)\alpha(e, f).$$

Količnički skup je

$$\mathbb{N}^2/\alpha = \{M_p | p \in \mathbb{N}\} \cup \{S_q | q \in \mathbb{N}\} \cup \{\{(a, a)|a \in \mathbb{N}\}\} \text{ gde su}$$
$$M_p = \{(a + p, a)|a \in \mathbb{N}\} \text{ i } S_q = \{(a, a + q)|a \in \mathbb{N}\}$$

koji se može smatrati skupom celih brojeva $\mathbb{Z}$, jer uvođenjem oznaka $M_p = p$, $S_q = -q$ i $\{(a, a)|a \in \mathbb{N}\} = 0$ za sve p i q iz $\mathbb{N}$ uspostavljena je bijekcija između skupova $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{N}^2/\alpha$. Za relaciju β radi se analogno. Faktor skup $\mathbb{N}^2/\beta$ skup je svih pozitivnih razlomaka (racionalnih brojeva) $\mathbb{Q}^+$.

Iz dosadašnjih primera jasno je da se mnogi matematički objekti (pojmovi) definišu tako što se u pogodno odabranom skupu definiše pogodna relacija ekvivalencije i tada će, s obzirom na tu relaciju, klase ekvivalencije biti ti novi matematički objekti (pojmovi). Tako se u prethodnim primerima došlo do pojmova celih brojeva, pozitivnih racionalnih brojeva, pojma pravca, slobodnih vektora itd.

Zadatak 2.34 *Ispitati relacije $<$ i $\leq$ u skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$.*

Rešenje Relacija $<$ nije refleksivna, a jeste antisimetrična i tranzitivna. Relacija $\leq$ je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna, tj. relacija poretka. U skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$, s obzirom na $\leq$, ne postoje ni minimalni ni maksimalni elementi.

Zadatak 2.35 *Dokazati da binarna relacija $\subseteq$ (podskup skupa) jeste relacija poretka u bilo kom od skupova $\mathcal{P}(S)$, $\mathcal{P}(S)\backslash\{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(S)\backslash\{S\}$ i $\mathcal{P}(S)\backslash\{\emptyset, \{S\}\}$, gde je S skup bar dva elementa. Naći minimalne i maksimalne elemente i najveći i najmanji element u tim skupovima, ukoliko postoje.*

Rešenje Refleksivnost, antisimetričnost i tranzitivnost relacije $\subseteq$ slede jednostavno iz njene definicije. Minimalni, maksimalni, najveći i najmanji elementi dati su u sledećoj tabeli, gde za svaki element x iz skupa S važi:

	$\mathcal{P}(S)$	$\mathcal{P}(S)\backslash\{\emptyset\}$	$\mathcal{P}(S)\backslash\{S\}$	$(\mathcal{P}(S)\backslash\{\emptyset\})\backslash\{S\}$
minimalni	$\emptyset$	$\{x\}$	$\emptyset$	$\{x\}$
maksimalni	S	S	$S\backslash\{x\}$	$S\backslash\{x\}$
najveći	S	S	–	–
najmanji	$\emptyset$	–	$\emptyset$	–

Zadatak 2.36 *U skupu $A \subseteq \mathbb{N}$ definisana je relacija ρ (čita se relacija „deli" i označava se sa $|$)*

$$(\forall x, y \in A) \ x \,\rho\, y \Leftrightarrow x \mid y \Leftrightarrow (\exists z \in \mathbb{N}) \ y = xz.$$

Dokazati da je ρ relacija poretka i naći minimalne i maksimalne, najveći i najmanji element, ukoliko postoje, ako je:

a) $A = \mathbb{N}$; *b)* $A = \mathbb{N}\backslash\{1\}$; *c)* $A = D_{42} = \{1, 2, 3, 7, 6, 14, 21, 42\}$;

d) $A = D_{42}\backslash\{1\}$; *e)* $A = D_{42}\backslash\{1, 42\}$; *f)* $A = \{2, 4, 6, 12, 18\}$;

g) $A = \mathbb{N}_{100} = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 100\}$; *h)*$A = \mathbb{N}_{100}\backslash\{1\}$;

i) $A = \mathbb{N}_{2^n} = \{2^n | n \in \mathbb{N}\}$; *j)* $A = \mathbb{N}_{2^n} \cup \{10\}$; *k)* $A = \mathbb{N}_{2^n} \cup \{5, 10\}$.

Rešenje Kako x deli x za svako x iz A, to je relacija „deli" refleksivna. Ako x deli y i y deli x, očevidno tada mora biti $x = y$, što znači da je relacija „deli" antisimetrična. Ako x deli y i y deli z, tada x deli z pa je relacija „deli" i tranzitivna.

A	Minimalni	Maksimalni	Najveći	Najmanji
$\mathbb{N}$	1	–	–	1
$\mathbb{N}\backslash\{1\}$	svi prosti brojevi	–	–	–
D_{42}	1	42	42	1
$D_{42}\backslash\{1\}$	$2, 3, 7$	42	42	–
$D_{42}\backslash\{1, 42\}$	$2, 3, 7$	$6, 14, 21$	–	–
$\{2, 4, 6, 12, 18\}$	2	$12, 18$	–	2
$\mathbb{N}_{100}$	1	$51, \ldots, 100$	–	1
$\mathbb{N}_{100}\backslash\{1\}$	svi prosti brojevi manji od 100	$51, \ldots, 100$	–	–
$\mathbb{N}_{2^n}$	2	–	–	2
$\mathbb{N}_{2^n} \cup \{10\}$	2	10	–	2
$\mathbb{N}_{2^n} \cup \{5, 10\}$	$2, 5$	10	–	–

Ako je a jedini minimalni element, da li je tada a i najmanji element?

Zadatak 2.37 *U nepraznom skupu A svih potomaka nekog čoveka u nekom fiksnom trenutku definisana je relacija ρ:*

$$x \,\rho\, y \Leftrightarrow ((x \text{ je predak } y) \vee x = y).$$

Dokazati da je ρ relacija poretka i ispitati egzistenciju najmanjeg i najvećeg elementa i minimalnih i maksimalnih elemenata.

Zadatak 2.38 *U skupu $\mathbb{R}$ realnih brojeva date su relacije:* $\rho_1 = \{(x,x)|x \in \mathbb{R}\}$, $\rho_2 = \{(2,5),(5,7),(3,4)\}$, $\rho_3 = \{(x,x)|x \in \mathbb{R}^+\}$, $\rho_4 = \{(x,x^2)|x \in \mathbb{R}\}$, $\rho_5 = \{(x,2^x)|x \in \mathbb{R}\}$, $\rho_6 = \{(x,|x|)|x \in \mathbb{R}\}$ *i* $\rho_7 = \{(x,2x-3)|x \in \mathbb{R}\}$. *Ispitati* R, S, A *i* T *datih relacija i naći njima inverzne relacije.*

Rezultat Refleksivna je samo ρ_1. Simetrične su ρ_1 i ρ_3. Antisimetrične su sve. Tranzitivne su ρ_1, ρ_3 i ρ_6.

$$\rho_1^{-1} = \rho_1,\ \rho_2^{-1} = \{(5,2),(7,5),(4,3)\},\ \rho_3^{-1} = \rho_3$$
$$\rho_4^{-1} = \{(x^2,x)|x \in \mathbb{R}\} = \{(x,\sqrt{x})|x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\} \cup \{(x,-\sqrt{x})|x \in \mathbb{R}^+\}$$
$$\rho_5^{-1} = \{(2^x,x)|x \in \mathbb{R}\} = \{(y,\log_2 y)|y \in \mathbb{R}^+\} = \{(x,\log_2 x)|x \in \mathbb{R}^+\}$$
$$\rho_6^{-1} = \{(|x|,x)|x \in \mathbb{R}\} = \{(x,x)|x \in \mathbb{R}^+\} \cup \{(x,-x)|x \in \mathbb{R}^+\} \cup \{(0,0)\}$$
$$\rho_7^{-1} = \{(2x-3,x)|x \in \mathbb{R}\} = \{(y,\frac{y+3}{2})|y \in \mathbb{R}\} = \{(x,\frac{x+3}{2})|x \in \mathbb{R}\}.$$

Zadatak 2.39 *U skupu $\mathbb{R}$ date su relacije:* $\rho_1 = \{(x,x^2)|x \in \mathbb{R}\}$, $\rho_2 = \{(x,-x)|x \in \mathbb{R}\}$, $\rho_3 = \{(x,y)|x+y=1, x,y \in \mathbb{R}\}$, $\rho_4 = \{(x,2x)|x \in \mathbb{R}\}$, $\rho_5 = \{(x,y)|x,y \in \mathbb{R}, xy > 0\} \cup \{0\}$, $\rho_6 = \{(0,0)\}$, $\rho_7 = \{(x,y)|\max\{x,y\} = 1,\ x,y \in \mathbb{R}\}$, $\rho_8 = \{(x,3-x)|x \in \mathbb{R}\}$.

Iza oznake svake od tih relacija zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje:
R – *refleksivnost,* S – *simetričnost,* A – *antisimetričnost,*
T – *tranzitivnost,* F – *funkcija*

ρ_1 : RSATF ρ_2 : RSATF ρ_3 : RSATF ρ_4 : RSATF ρ_5 : RSATF ρ_6 : RSATF ρ_7 : RSATF ρ_8 : RSATF.

Za relaije koje su RST *napisati njihove klase ekvivalencije.*

Zadatak 2.40 *Neka je* $A = \{a,b,c,d,e,f\}$, $B = A \setminus \{a\}$, $C = B \setminus \{f\}$, $\rho_1 = \{(x,x)|x \in A\} \cup \{(b,c),(b,d),(b,e),(b,f),(c,e),(d,e),(d,f)\}$, $\rho_2 = \rho_1 \setminus \{(a,a)\}$, $\rho_3 = \rho_1 \setminus \{(a,a),(f,f),(b,f),(d,f)\}$. *Za relacije poretka nacrtati Haseove dijagrame, popuniti tabelu, odnosno staviti / tamo gde traženo ne postoji ili gde ρ_i nije relacija poretka.*

	(A,ρ_1)	(B,ρ_2)	(C,ρ_3)
minimalni			
maksimalni			
najveći			
najmanji			

Primer 2.41 *Izračunati broj svih binarnih relacija definisanih na skupu* $M = \{1,2\}$ *koje su:*
a) *Proizvoljne* **b)** *Refleksivne* **c)** *Simetrične*
d) *Antisimetrične* **e)** *Tranzitivne* **f)** *Ekvivalencije*
g) *Relacije poretka* **h)** *Ni simetrične ni antisimetrične*
i) *Simetrične i antisimetrične* **j)** *Relacije ekvivalencije i poretka*
Rezultat: **a)** 16, **b)** 4, **c)** 8, **d)** 12, **e)** 13, **f)** 2, **g)** 3, **h)** 0, **i)** 4, **j)** 1.

Primer 2.42 *Izračunati broj svih binarnih relacija definisanih na skupu* $M = \{1,2,3\}$ *koje su:*
a) *Proizvoljne* **b)** *Refleksivne* **c)** *Simetrične* **d)** *Antisimetrične* **e)** *Ekvivalencije* **f)** *Relacije poretka* **g)** *Ni simetrične ni antisimetrične* **h)** *Simetrične i antisimetrične* **i)** *Relacije ekvivalencije i poretka*
Rezultat: **a)** 512, **b)** 64, **c)** 64, **d)** 216, **e)** 5, **f)** 19, **g)** 240, **h)** 8, **i)** 1.

Primer 2.43 *Koliki je broj svih binarnih relacija definisanih na skupu* $M = \{1,\dots,n\}$ *koje su:*
a) *Proizvoljne* **b)** *Refleksivne* **c)** *Simetrične* **d)** *Antisimetrične*
e) *Ekvivalencije* **f)** *Relacije poretka za* $n = 4$ **g)** *Ni simetrične ni antisimetrične*
h) *Simetrične i antisimetrične* **i)** *Relacije ekvivalencije i poretka*
Rezultat: **a)** 2^{n^2} **b)** 2^{n^2-n} **c)** $2^n \cdot 2^{\binom{n}{2}}$ **d)** $2^n \cdot 3^{\binom{n}{2}}$ **e)** $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \cdot (-1)^k \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} i^n$ **f)** *Za* $n = 4$ *ima* 219 **g)** $2^n \sum_{k=1}^{4} (-1)^{\binom{k}{2}} k^{\binom{n}{2}}$ *(Savezno takmičenje u SFRJ, 1990. u Tuzli, autor R. D.)* **h)** 2^n **i)** 1.

Da bi se rešio zadatak pod **f)**, treba nacrtati 16 Haseovih dijagrama tih relacija, a zatim četiri elementa toga skupa raspoređivati po čvorovima Haseovog dijagrama.

Dokazati rezultat pod **g)**. Neka su $\mathcal{S}$ skup svih simetričnih i $\mathcal{A}$ skup svih antisimetričnih relacija skupa $M = \{1, 2, ..., n\}$, a $\overline{\mathcal{S}}$ i $\overline{\mathcal{A}}$ njihovi komplementi u odnosu na partitivni skup skupa $M^2 = \{(x,y) | x \in M \wedge y \in M\}$, tj. u odnosu na skup $\mathcal{P}(M^2)$ svih relacija skupa M kojih ima $|\mathcal{P}(M^2)| = 2^{n^2} = 2^n \cdot 4^{\binom{n}{2}}$. Na osnovu Demorganovog zakona je $\overline{\mathcal{S}} \cap \overline{\mathcal{A}} = \overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{S}}$, pa zbog toga i formule uključenja-isključenja i 1.7 sledi $|\overline{\mathcal{S}} \cap \overline{\mathcal{A}}| = |\overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{S}}| = 2^n \cdot 4^{\binom{n}{2}} - |\mathcal{A} \cup \mathcal{S}| = 2^n \cdot 4^{\binom{n}{2}} - |\mathcal{S}| - |\mathcal{A}| + |\mathcal{S} \cap \mathcal{A}|$. Kako je $\mathcal{S} \cap \mathcal{A}$ skup svih relacija u kojima ne postoji par čije su komponente različite, to je $\mathcal{S} \cap \mathcal{A}$ skup svih podskupova skupa $\{(1,1)(2,2), ..., (n,n)\}$, pa je $|\mathcal{S} \cap \mathcal{A}| = 2^n$, a na osnovu **c)** i **d)** je $|\mathcal{S}| = 2^n \cdot 2^{\binom{n}{2}}$ i $|\mathcal{A}| = 2^n \cdot 3^{\binom{n}{2}}$ pa je dokaz završen.

Primer 2.44 *Pokazati da relacija „deli” definisana u podskupu skupa prirodnih brojeva* $A = \{2,3,4,5,6,7,9,12,18\}$ *jeste relacija poretka i prikazati Haseov dijagram, minimalne i maksimalne elemente, najveći i najmanji element.*

Primer 2.45 *Naći minimalne i maksimalne elemente i najveći i najmanji element, ukoliko postoje, u skupovima* $A = \{5, 6, \cdots, 15\}$, $B = \{1, 2, 3, 6, 9\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $D = \{2, 4, 10, 100\}$ *i skupu* $E = \{3^n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{6\}$ *u odnosu na relaciju poretka „deli”.*

Primer 2.46 *Za relacije* $\rho_1 = \{(2,5),(5,7),(2,7)\}$, $\rho_2 = \{(x,y)|x^2+y^2 = 1 \wedge x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$, $\rho_3 = \{(x^2,x)|x \in \mathbb{R}\}$, $\rho_4 = \{(x,y)|x^2 = y^2 \wedge x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$, $\rho_5 = \{(|x|,x)|x \in \mathbb{R}\}$ *i* $\rho_6 = \{(1,2),(2,1),(1,3)\}$, $\rho_7 = \{(1,1),(2,2)\}$, *definisane u skupu realnih brojeva* $\mathbb{R}$ *popuniti tabelu sa* **da** *ili* **ne**.

$\backslash$	ρ_i *je* R	ρ_i *je* S	ρ_i *je* A	ρ_i *je* T	ρ_i *je* F	ρ_i *je ekvivalencija*
ρ_1						
ρ_2						
ρ_3						
ρ_4						
ρ_5						
ρ_6						
ρ_7						

Primer 2.47 *Neka je* $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{a,b,c,d\}$
$\rho = \{(x,x)|x \in A\} \cup \{(1,2),(1,3),(2,3),(4,5),(4,3),(5,3)\}$,
$\theta = \{(x,x)|x \in B\} \cup \{(a,c),(a,d),(c,d)\}$. *Nacrtati Haseove dijagrame za* (A,ρ) *i* (B,θ)

(A,ρ):	(B,θ):

i popuniti tabelu, odnosno staviti / tamo gde traženo ne postoji.

	(A,ρ)	(B,θ)
minimalni		
maksimalni		
najveći		
najmanji		

Primer 2.48 *Neka su* ρ_i *relacije skupa* $\mathbb{R}$: $\rho_1 = \{(x,x+1)|x \in \mathbb{R}\}$, $\rho_2 = \{(x,y)|x \in \mathbb{R}, y \in [x-1,x+1]\}$, $\rho_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$, $\rho_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y^2 = x^2\}$. *Iza oznake svake od tih relacija zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje:* R -

refleksivnost, S - *simetričnost,* A - *antisimetričnost,* T - *tranzitivnost,* F - *funkcija* ρ_1 : RSATF, ρ_2 : RSATF, ρ_3 : RSATF, ρ_4 : RSATF.

Primer 2.49 *Napisati relaciju poretka* ρ_1 *koja neposeduje nijednu od osobina* RSATF*i relaciju* ρ_2 *koja poseduje svaku od osobina* RSATF *obe definisane u skupu* $\{1, 2, 3\}$ $\rho_1 = \{ \qquad\qquad \}$ $\rho_2 = \{ \qquad\qquad \}$

Poglavlje 3

FUNKCIJE

Kao i relacija, tako je i pojam funkcije veoma važan u svima oblastima nauke, prirodno se nadovezuje na pojam relacije odnosno skupa uređenih parova. Napomenimo da termini **funkcija**, **preslikavanje**, **zakon**, **pravilo**, **transformacija**, **pridruživanje**, **operator** i **operacija** imaju isto značenje, tj. oni su sinonimi.

Već u poglavlju o relacijama data je definicija funkcije 2.11. Evo još nekoliko ekvivalentnih definicija funkcije.

Definicija 3.1 *Slikovita definicija funkcije.*

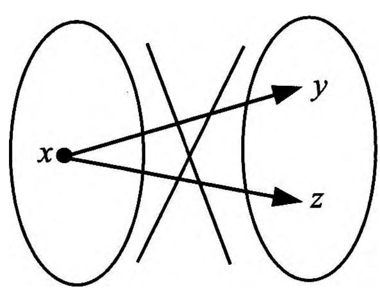


Figure 3.1: Drugim rečima, ne sme da se desi da se jedan te isti element x preslikava u dve različite slike, y i z

Definicija 3.2 *Funkcija je skup uređenih parova u kome* **ne postoje dva para** (*na primer* $(3,6)$ *i* $(3,9)$) *čije su prve komponente jednake, a druge različite.*

Definicija 3.3 *Neka je f skup uređenih parova, skup $\mathcal{D}(f)$ skup svih njegovih prvih komponenti i $\mathcal{A}(f)$ skup svih njegovih drugih komponenti. Tada se za f kaže da je funkcija akko važi*

$$(\forall x \in \mathcal{D}(f))(\forall y, z \in \mathcal{A}(f)) \ \ ((x,y) \in f \wedge (x,z) \in f) \Rightarrow y = z).$$

Umesto oznake $(x,y) \in f$ obično se koristi oznaka $y = f(x)$.

Definicija 3.4 *Ako je $g \subseteq f$, tada se za funkciju g kaže da je restrikcija funkcije f i piše se $g = f_{\mathcal{D}(g)}$.*

Na primer, funkcija $g = \{(a,1),(b,2)\}$ je restrikcija funkcije f definisane sa $f = \{(a,1),(b,2),(c,5)\}$, što će se označavati sa

$$f_{\mathcal{D}(g)} = f_{\{a,b\}} = g = \{(a,1),(b,2)\}.$$

Neprazan skup uređenih parova f funkcija je ako i samo ako je

$$(\forall x \in \mathcal{D}(f))(\forall y, z \in \mathcal{A}(f)) \ \ (y \neq z \Rightarrow ((x,y) \notin f \vee (x,z) \notin f)).$$

Dokaz je posledica zakona kontrapozicije $p \Rightarrow q \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ i Demorganovog zakona $\neg(p \wedge q) \Rightarrow \neg p \vee \neg q$.

Ako se umesto oznake $(x,y) \in f$ koristi oznaka $y = f(x)$, tada prethodne dve definicije postaju:

Definicija 3.5 *Skup uređenih parova f je funkcija akko*

$$\Big(\forall x, y \in \mathcal{D}(f)\Big) \qquad \boxed{x = y \Rightarrow f(x) = f(y).}$$

Definicija 3.6 *Skup uređenih parova f je funkcija akko*

$$\Big(\forall x, y \in \mathcal{D}(f)\Big) \qquad \boxed{f(x) \neq f(y) \Rightarrow x \neq y.}$$

Definicija 3.7 *Neka su u Dekartovom pravouglom sistemu xOy, u nekoj ravni neke tačke x ose predstavljaju* **prve komponente**, *a neke tačke y ose* **druge komponente** *skupa uređenih parova f. Svakom paru $(o, s) \in f$ očevidno jednoznačno odgovara tačka M te ravni čije su „koordinate" (o, s), to jest $M = M(o, s)$. Skup tačaka M nazvaće se grafika skupa uređenih parova f. Proizvoljni podskup skupa tačaka ravni interpretira jednoznačno neki skup uređenih parova f. Tada je svaki* **grafik skupa uređenih parova f grafik funkcije akko svaka prava paralelna sa y osom seče grafik u najviše jednoj tački, tj. sa grafikom ima najviše jednu zajedničku tačku.**

Da li svaka funkcija ima jednoznačno određen grafik ili neka funkcija može imati više različitih grafika s obzirom na prethodnu definiciju?

Definicija 3.8 *Ako je* $f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$ *i ako su svaka dva elementa iz $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ međusobno različita, tada f predstavlja, odnosno određuje funkciju $f = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_n, b_n)\}$, to jest funkciju $f(a_i) = b_i$ za sve vrednosti prirodnog broja $i \in \{1, 2, ..., n\}$.*

Time je dato sedam ekvivalentnih definicija funkcije.

Neka su x, y, z različiti elementi. Tada su $f_1 = \{(1, x), (2, y)\}$ i $f_2 = \{(1, x), (2, y), (3, z)\}$ funkcije, dok skupovi $f_3 = \{\boxed{(1,x),(1,y)}\}$ i $f_4 = \{\boxed{(1,x),(1,y)}, (2, z)\}$ nisu funkcije, jer **postoje** dva para $(1, x)$ i $(1, y)$ kod kojih su prve komponente jednake, a druge različite (uokvireni parovi).

Definicija 3.9 *Skup svih prvih komponenti funkcije f naziva se domen funkcije i označava se sa $\mathcal{D}(f)$, dok se $\mathcal{A}(f)$ naziva skup svih slika. Elementi skupa $\mathcal{D}(f)$ nazivaju se originali, a elementi skupa $\mathcal{A}(f)$ slike.*

Drugim rečima, definicija 3.3 govori: „f je funkcija ako svakom originalu odgovara tačno jedna slika, odnosno ne sme da se desi da se jedan original preslikava u dve različite slike".

Definicija 3.10 *Ako je $A = \mathcal{D}(f)$ i $\mathcal{A}(f) \subseteq B$ gde je f neka funkcija, onda se kaže da f preslikava skup A u skup B ili f je funkcija skupa A u skup B, što se označava sa $f : A \to B$ ili $A \xrightarrow{f} B$. Ako se element x funkcijom f preslikava u $f(x)$, to se zapisuje sa*

$$x \overset{f}{\mapsto} f(x) \text{ ili } f : x \mapsto f(x).$$

Drugim rečima, funkcija skupa A u skup B svakom elementu skupa A „pridružuje" određeni element skupa B, s tim što mogu postojati elementi skupa B kojima nije pridružen nijedan element skupa A.

Definicija 3.11 *f je funkcija skupa A u skup B, što se zapisuje kao*

$$f : A \longrightarrow B \quad , \textit{ako i samo ako}$$

$$\boxed{f \textit{ je funkcija}} \quad \wedge \quad \boxed{\mathcal{D}(f) = A} \quad \wedge \quad \boxed{\mathcal{A}(f) \subseteq B}$$

Očevidno je da je definicija 3.10 ekvivalentna definiciji 3.11.

Definicija 3.12 *Funkcija $f : A \longrightarrow B$ je sirjektivna akko $\mathcal{A}(f) = B$, što se označava sa $f : A \overset{na}{\longrightarrow} B$.*

Drugim rečima, funkcija skupa A u skup B je sirjektivna ako za svaki element iz skupa B postoji original iz skupa A koji se u nju preslikava.

Funkcija $f : A \longrightarrow B$ je sirjektivna ako za svaki element x skupa B, postoji element y skupa A, takav da je $f(y) = x$. Prema tome

$$f : A \overset{\text{na}}{\longrightarrow} B \Leftrightarrow$$

$$\Big(f \text{ je funkcija} \quad \wedge \quad \mathcal{D}(f) = A \quad \wedge \quad (\forall y \in B)(\exists x \in A) f(x) = y\Big)$$

Prva dva člana ovih konjunkcija iz zagrade su iz definicije funkcije $f : A \longrightarrow B$, dok je treći definicija sirjektivnosti.

Definicija 3.13 *Funkcija je injektivna ili jedan-jedan akko* ne postoje *dva para čije su prve komponente različite, a druge jednake.*

Neka su x, y, z različiti elementi. Tada $f_1 = \{(1,x),(2,y)\}$ i $f_2 = \{(1,x),(2,y),(3,z)\}$ jesu injektivne odnosno jedan-jedan funkcije, dok $f_3 = \{\boxed{(1,\text{x}),(2,\text{x})}, (3,z)\}$, $f_4 = \{(3,y), \boxed{(1,\text{x}),(2,\text{x})}\}$ nisu injektivne funkcije, jer **postoje** dva para $(1,x)$ i $(2,x)$ kod kojih su prve komponente različite, a druge jednake (uokvireni parovi).

Definicija 3.14 *Za funkciju f kaže se da je jedan-jedan ili injektivna akko za svako x i y iz njenog domena $\mathcal{D}(f)$ važi:*

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Ako je f injektivna funkcija skupa A u skup B, to se označava sa

$$f : A \overset{1-1}{\rightarrow} B.$$

Drugim rečima, ne sme da se desi da se dva različita originala preslikavaju u istu sliku.

Definicija 3.15 *Ako je $f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$ funkcija (definicija 3.8) i ako su svaka dva elementa iz $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ međusobno različita, tada je $f = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_n, b_n)\}$ injektivna funkcija.*

Definicija 3.16 *Ako funkcija $f : A \to B$ nije injektivna, tada je njena* **injektivna restrikcija** *injektivna funkcija $f_C : C \overset{1-1}{\rightarrow} B$, gde je $C \subseteq A$ i, naravno, $f_C(x) = f(x)$ za svako $x \in C$.*

Definicija 3.17 *Injektivna restrikcija $f_C : C \overset{1-1}{\rightarrow} B$ od neke funkcije $f : A \to B$, $C \subseteq A$ je* **maksimalna injektivna restrikcija** *ako za svaki pravi nadskup D skupa C ($C \subset D$) važi da njena restrikcija $f_D : D \to B$* nije *injektivna.*

Jasno je da je svaki podskup g od funkcije f takođe funkcija. Međutim, i ako f nije injektivna, g može biti injektivna.

Na primer, $f = \binom{1234}{abbc}$ je neinjektivna funkcija skupa $A = \{1, 2, 3, 4\}$ u skup $B = \{a, b, c\}$, a $f_C = \binom{134}{abc}$ njena injektivna restrikcija nad domenom $C = \{1, 3, 4\}$, tj. injektivna funkcija skupa C u skup B.

Definicija 3.18 *Shodno definiciji* 3.7 *može se kazati da grafik neke funkcije jeste grafik injektivne funkcije akko svaka prava paralelna sa x osom seče grafik u najviše jednoj tački.*

Injektivnost je definisana za svaku funkciju f, dok je sirjektivnost definisana samo za funkciju f skup A u skup B, tj. za $f : A \to B$, gde je f bilo koja funkcija. Drugim rečima, pitanje da li je funkcija f sirjektivna, nema smisla odnosno nije definisano.

Važno je primetiti da je projekcija grafika funkcije f na x osu domen funkcije f, tj. $\mathcal{D}(f)$, dok je projekcija grafika na y osu skup svih slika funkcije f, odnosno $\mathcal{A}(f)$.

Pitanje „Da li je funkcija f sirjektivna" besmisleno je (nedefinisano) jer nije zadat skup B. Ima smisla samo pitanje „Da li funkcija skupa A u skup B jeste sirjektivna", dok pitanje da li je funkcija f injektivna uvek ima smisla.

Definicija 3.19 *Ako je f injektivna i sirjektivna funkcija skupa A u skup B, onda se kaže da je f bijektivna funkcija skupa A u skup B ili, kratko, bijekcija između skupova A i B, što se označava sa*

$$f : A \underset{na}{\overset{1-1}{\to}} B.$$

Bijekcija skupa A na samog sebe naziva se permutacija *skupa A.*

$\boxed{\text{Skup permutacija skupa } \{1, 2, \ldots, n\} \text{ ima } n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \text{ elemenata.}}$

Podsetimo se da se broj elemenata skupa A označava sa $|A|$, to jest broj elemenata skupa $\{a, b, c\}$ je $|\{a, b, c\}| = 3$.

Pre prebrojavanja funkcije u sledećem primeru, prvo napisati sve te funkcije.

Primer 3.20 *Neka su $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{x, y\}$. Tada je*

$\lvert\{f \mid f : A \to B\}\rvert = 2^3$	$\lvert\{f \mid f : A \overset{1-1}{\to} B\}\rvert = 0$
$\lvert\{f \mid f : A \overset{na}{\to} B\}\rvert = 2^3 - 2$	$\lvert\{f \mid f : B \to A\}\rvert = 3^2$
$\lvert\{f \mid f : B \overset{1-1}{\to} A\}\rvert = 3 \cdot 2$	$\lvert\{f \mid f : B \overset{na}{\to} A\}\rvert = 0$
$\lvert\{f \mid f : A \to A\}\rvert = 3^3$	$\lvert\{f \mid f : A \overset{1-1}{\to} A\}\rvert = 3!$
$\lvert\{f \mid f : A \overset{na}{\to} A\}\rvert = 3!$	$\lvert\{f \mid f : A \underset{na}{\overset{1-1}{\to}} A\}\rvert = 3!$
$\lvert\{f \mid f : B \to B\}\rvert = 2^2$	$\lvert\{f \mid f : B \overset{1-1}{\to} B\}\rvert = 2!$
$\lvert\{f \mid f : B \overset{na}{\to} B\}\rvert = 2!$	$\lvert\{f \mid f : B \underset{na}{\overset{1-1}{\to}} B\}\rvert = 2!$

Iz ovih primera vidi se da je broj svih proizvoljnih funkcija skupa $A = \{1, 2, ..., k\}$ u skup $B = \{1, 2, ..., n\}$ jednak broju svih varijacija s ponavljanjem od n elemenata k-te klase, to jest

$$|\{f \mid f : A \to B\}| = \overline{V_k^n} = n^k,$$

a broj injektivnih funkcija skupa $A = \{1, 2, ..., k\}$ u skup $B = \{1, 2, ..., n\}$ za $(k \leq n)$ jednak je broju svih varijacija bez ponavljanja od n elemenata k-te klase, to jest

$$|\{f \mid f : A \overset{1-1}{\to} B\}| = V_k^n = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n - (k-1))}_{k}.$$

Broj svih bijektivnih funkcija $|\{f \mid f : B \underset{na}{\overset{1-1}{\to}} B\}|$, odnosno permutacija skupa $B = \{1, 2, \ldots, n\}$, jednak je broju permutacija bez ponavljanja skupa

B, to jest

$$|\{f | f : B \underset{na}{\overset{1-1}{\to}} B\}| = P(n) = n!$$

Definicija 3.21 *Ako je inverzna relacija f^{-1} funkcije f takođe funkcija, onda se kaže da je f^{-1} inverzna funkcija funkcije f.*

Ako je, na primer, $f = \{(1,x),(2,y),(3,z)\}$, tada je njoj inverzna funkcija $f^{-1} = \{(x,1),(y,2),(z,3)\}$.

Treba primetiti da za funkciju $f = \{(1,x),(2,x),(3,z)\}$, skup parova $f^{-1} = \{(x,1),(x,2),(z,3)\}$ nije funkcija, jer se original x preslikava u dve različite slike (1 i 2).

Teorema 3.22 *Inverzna relacija f^{-1} funkcije f je funkcija (postoji inverzna funkcija za funkciju f) ako i samo ako je f injektivna.*

Dokaz Funkcija f je injektivna akko

$$(\forall x, z \in \mathcal{D}(f)) \ \ (\forall y \in \mathcal{A}(f)) \ \ (((x,y) \in f \wedge (z,y) \in f) \Rightarrow x = z)$$

a to je na osnovu definicija 2.9 i 3.3 ekvivalentno sa

$$(\forall y \in \mathcal{D}(f^{-1})) \ \ (\forall x, z \in \mathcal{A}(f^{-1})(((y,x) \in f^{-1} \wedge (y,z) \in f^{-1}) \Rightarrow x = z)$$

što je ekvivalentno sa f^{-1} je funkcija. $\square$

Teorema 3.23 *Funkcije f i g jednake su ako i samo ako je $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(g) = A$ i $f(x) = g(x)$ za svako x iz domena, to jest*

$$(\forall x \in A) \ f(x) = g(x) \ \Rightarrow \ f = g.$$

Dokaz ($\Leftarrow$) Pošto je $\forall x \in \mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(g) \ \ f(x) = g(x)$, to je

$$f = \{(x, f(x)) | x \in \mathcal{D}(f)\} = \{(x, g(x)) | x \in \mathcal{D}(g)\} = g \text{ tj. } f = g.$$

($\Rightarrow$) Ovaj smer je očevidan. $\square$

Činjenica 3.24

Drugim rečima, jednakost dveju funkcija s jednakim domenima dokazuje se tako što se proizvoljni x iz domena preslika s obema funkcijama i gleda se da li je dobijen istovetan rezultat. Ako jeste, i to za svako x iz domena, tada su funkcije jednake.

Definicija 3.25 *Neka su A, B i C neprazni skupovi i $f : A \to B$ i $g : B \to C$ date funkcije. Funkcija $g \circ f$ skupa A u skup C definisanu sa*

$$(\forall x \in A) \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

naziva se kompozicija funkcija g i f.

Teorema 3.26 *Kompozicija funkcija koje sve preslikavaju isti skup A u samog sebe, jeste asocijativna operacija.*

Skup svih bijekcija (permutacija) skupa A u odnosu na kompoziciju funkcija $\circ$ jeste grupa koja se označava sa $Sym\ A$.

Dokaz Za svako x iz skupa $\mathcal{D}(h)$ važi:

$$\Big((f \circ g) \circ h\Big)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) = f\Big((g \circ h)(x)\Big) = \Big(f \circ (g \circ h)\Big)(x),$$

a to je ekvivalentno sa $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Kako je očevidno kompozicija bijekcija opet bijekcija i kako svaka bijekcija ima sebi inverznu, sledi da $\mathrm{Sym}\ A = (\{f | f : A \underset{\text{na}}{\overset{1-1}{\longrightarrow}} A\}, \circ)$ jeste grupa.

Definicija 3.27 *Skup* **permutacija s ponavljanjem** *jeste skup svih takvih funkcija f skupa $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ u neki konačni skup M, tako što se u svakoj funkciji f svaka slika pojavljuje uvek isti broj puta.*

Primer 3.28 *Ako su $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $M = \{a, b\}$, tada je skup $P_{3,2}(5) =$*

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ a\,a\,a\,b\,b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ a\,a\,b\,a\,b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ a\,a\,b\,b\,a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ a\,b\,a\,a\,b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ a\,b\,a\,b\,a \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ a\,b\,b\,a\,a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ b\,a\,a\,a\,b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ b\,a\,a\,b\,a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ b\,a\,b\,a\,a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ b\,b\,a\,a\,a \end{pmatrix} \right\}$$

skup permutacija s ponavljanjem pet elemenata u kojima su tri slike međusobno jednake i dve slike međusobno jednake i $|P_{2,3}(5)| = \frac{5!}{3!2!}$.

Teorema 3.29 *Neka su $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$, neka je $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ i neka je $k_1 + k_2 +, \ldots, k_n = n$. Tada broj $P_{k_1, k_2, \ldots, k_n}(n)$ skupa svih funkcija $\Big\{ f | f : A \to A \wedge |\{x | f(x) = i\}| = k_i \Big\}$, koji se naziva skup svih* **permutacija s ponavljanjem** *n elemenata među kojima se slika (element) i pojavljuje tačno k_i puta, $i \in \mathbb{N}_n$, je $P_{k_1, k_2, \ldots, k_n}(n) = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_n!}$.*

Primetimo da za $k_1 = ... = k_n = 1$, to su permutacije bez ponavljanja (bijekcije), kojih ima $n!$

Dokaz ove teoreme po principu množenja je očevidan, jer ako se pretpostavi da su svake dve slike u funkciji f različite, tada bi broj funkcija bio $n!$ Međutim, kako njih k_1 slika su međusobno jednake, sledi da će se broj traženih funkcija smanjiti $k_1!$ puta. Analogno tome broj funkcija smanjiće se i $k_2!$ puta itd. smanjiće se još i $k_n!$ puta.

Definicija 3.30 *Funkcija $f : A \longrightarrow B$ je rastuća, gde su A i B totalno uređeni skupovi, što označavamo sa $f \nearrow$, akko za svako x i svako y iz skupa A važi* 2.21

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

Kako u zapisu funkcije $f = \binom{a_1\, a_2 \dots a_k}{b_1\, b_2 \dots b_k}$ odnosno $f = \binom{a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_k}{f(a_1)\, f(a_2) \dots f(a_k)}$ redosled u prvoj vrsti može biti bilo kakav, može se dogovoriti da u prvoj vrsti niz brojeva a_1, $a_2, \dots, a_k$ jeste uvek u rastućem poretku, tj. $a_1 < a_2 < \dots < a_k$, jer će tada funkcija $f = \binom{a_1\, a_2 \dots a_k}{b_1\, b_2 \dots b_k}$ biti rastuća ako i samo ako je $b_1 < b_2 < \dots < b_k$.

Na primer, $f_1 = \binom{123}{123}$, $f_2 = \binom{123}{135}$, $f_3 = \binom{123}{245}$, $f_4 = \binom{123}{345}$, itd. jesu rastuće funkcije skupa $\{1, 2, 3\}$ u skup $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Svakoj toj rastućoj funkciji jednoznačno odgovara „tročlani podskup petočlanog skupa" $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. **U kombinatorici se one nazivaju kombinacije bez ponavljanja od pet elemenata treće klase i njihov broj se obeležava sa** $C_3^5 = \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!}$. Opšta formula za broj k-točlanih podskupova n-točlanog skupa, tj. rastućih funkcija skupa $\{1, 2, \cdots, k\}$ u skup $\{1, 2, \cdots, n\}$ je $C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$ za $n > k$. Kako je u funkcijama od f_1 do f_4 prva vrsta uvek ista, one se mogu **predstavljati samo drugom vrstom**, što će se ubuduće i raditi, $f_1 = \binom{123}{123} = 123$, $f_2 = \binom{123}{135} = 135$, $f_3 = \binom{123}{245} = 245$.

Primer 3.31 *Izvršiti prebrajanje sledećih skupova rastućih funkcija:*

$$|\{f | f : \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2\} \land f \nearrow\}| = 1$$
$$|\{f | f : \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2, 3\} \land f \nearrow\}| = 3$$
$$|\{f | f : \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\} \land f \nearrow\}| = 6$$
$$|\{f | f : \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\} \land f \nearrow\}| = 10$$
$$|\{f | f : \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2, 3, ..., n\} \land f \nearrow\}| = \binom{n}{2}$$

Primer 3.32 *Izvršiti prebrajanje sledećih skupova rastućih funkcija:*

$$
\begin{aligned}
|\{f|f:\{1,2,3\}\longrightarrow\{1,2\}\ \wedge\ f\nearrow\}| &= 0\\
|\{f|f:\{1,2,3\}\longrightarrow\{1,2,3\}\ \wedge\ f\nearrow\}| &= 27\\
|\{f|f:\{1,2,3\}\longrightarrow\{1,2,3,4\}\ \wedge\ f\nearrow\}| &= 64\\
|\{f|f:\{1,2,3\}\longrightarrow\{1,2,3,4,5\}\ \wedge\ f\nearrow\}| &= 125\\
|\{f|f:\{1,2,3\}\longrightarrow\{1,2,3,\ldots,n\}\ \wedge\ f\nearrow\}| &= n^3
\end{aligned}
$$

Definicija 3.33 *Funkcija $f:A\longrightarrow B$ je neopadajuća,* [1] *gde su A i B totalno uređeni skupovi, što se označava sa $f\underline{\nearrow}$, ako za svako x i svako y iz skupa A važi*

$$x<y\Rightarrow f(x)\leq f(y).$$

Na primer, $f_1=\binom{1234567}{1123455}$, $f_2=\binom{1234567}{1123455}$, $f_3=\binom{1234567}{1111111}$, $f_4=\binom{1234567}{1155555}$, $f_5=\binom{1234567}{3333445}$, $f_6=\binom{1234567}{5555555}$ itd. jesu neopadajuće funkcije skupa $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ u skup $\{1,2,3,4,5\}$. **U kombinatorici one su kombinacije s ponavljanjem od pet elemenata sedme klase i njihov broj se obeležava sa** $\overline{C_7^5}=\binom{5+7-1}{7}$. Opšta formula glasi:
$\overline{C_k^n}=\left|\left\{f|f:\{1,\ldots,k\}\to\{1,2,\ldots,n\}\ \wedge\ f\underline{\nearrow}\right\}\right|=\frac{(k+n-1)!}{k!\cdot(n-1)!}=\binom{n+k-1}{k}$. Kako u zapisu funkcije $f=\binom{a_1\ a_2\ \ldots\ a_k}{b_1\ b_2\ \ldots\ b_k}$ tj. $f=\binom{a_1\quad a_2\quad\ldots\quad a_k}{f(a_1)\ f(a_2)\ldots\ f(a_k)}$ redosled u prvoj vrsti može biti bilo kakav, može se dogovoriti da u prvoj vrsti niz brojeva a_1, $a_2,\ldots$, a_k jeste uvek u rastućem poretku, tj. $a_1<a_2<\ldots<a_k$, jer će tada funkcija $f=\binom{a_1\ a_2\ \ldots\ a_k}{b_1\ b_2\ \ldots\ b_k}$ biti neopadajuća ako i samo ako je $b_1\leq b_2\leq\ldots\leq b_k$.

Kako je u funkcijama od f_1 do f_6 prva vrsta uvek ista, to se one mogu **predstavljati samo drugom vrstom**, što će se ubuduće i raditi, $f_1=\binom{1234567}{1123455}=1123455$, $f_2=\binom{1234567}{1222255}=1222255$, $f_3=\binom{1234567}{1111111}=1111111$, $f_4=\binom{1234567}{1155555}=1155555$, $f_5=\binom{1234567}{3333445}=3333445$, $f_6=\binom{1234567}{5555555}=5555555$ itd.

Primer 3.34 *Izvršiti prebajanje sledećih skupova neopadajućih funkcija, odnosno kombinacija s ponavljanjem:*

[1]Neopadajuća nije isto što i „nije opadajuća"

$$|\{f|f:\{1,2\}\to\{1,2\}\wedge f\nearrow\}| = 3$$
$$|\{f|f:\{1,2\}\to\{1,2,3\}\wedge f\nearrow\}| = 6$$
$$|\{f|f:\{1,2\}\to\{1,2,3,4\}\wedge f\nearrow\}| = 10$$
$$|\{f|f:\{1,2\}\to\{1,2,3,4,5\}\wedge f\nearrow\}| =$$
$$|\{f|f:\{1,2\}\to\{1,2,...,n\}\wedge f\nearrow\}| =$$

Primer 3.35 *Prebrojati sledeće skupove neopadajućih funkcija:*

$$|\{f|f:\{1,2,3\}\to\{1,2\}\wedge f\nearrow\}| = 4$$
$$|\{f|f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}\wedge f\nearrow\}| = 10$$
$$|\{f|f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3,4\}\wedge f\nearrow\}| = 20$$
$$|\{f|f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3,4,5\}\wedge f\nearrow\}| =$$
$$|\{f|f:\{1,2,3\}\to\{1,2,...,n\}\wedge f\nearrow\}| =$$

Pokazati da se kombinacije s ponavljanjem mogu interpretirati kao permutacije s ponavljanjem! Uočiti neku proizvoljnu kombinaciju s ponavljanjem skupa od četiri elementa $\{1,2,3,4\}$ devete klase s ponavljanjem, tj. neopadajuću funkciju skupa $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ u $\{1,2,3,4\}$, na primer neopadajuću funkciju 112333344, tj. $\binom{123456789}{112333344}$. Ova kombinacija s ponavljanjem (neopadajuća funkcija) može se interpretirati (odrediti, predstaviti, zadati,...), na primer sa nizom devet kuglica koje se ne razlikuju i tri pregrade koje se ne razlikuju, tj. sa $oo|o|oooo|oo$. Kombinacija 333333333 interpretira se sa $||ooooooooo|$, 122222224 sa $o|ooooooo||o$, 111111444 sa $oooooo|||ooo$ itd. Broj kuglica levo od prve pregrade jeste broj jedinica, broj kuglica između prve i druge pregrade je broj dvojki, broj kuglica između druge i treće pregrade je broj trojki i, na kraju, broj kuglica desno od treće (poslednje) pregrade je broj četvorki. Kako su ovi nizovi permutacije s ponavljanjem od 12 elemenata među kojima ima devet jednakih i tri jednaka, to je njihov broj jednak $\overline{C_9^4} = \frac{12!}{9!\cdot 3!} = \binom{4+9-1}{9}$.

Kombinacije s ponavljanjem od n elemenata k-te klase, tj. neopadajuće funkcije skupa $\{1,2,...,k\}$ u skup $\{1,2,...,n\}$ interpretiraju se nizom od k kuglica i $n-1$ pregrada među njima, tj. permutacijama s ponavljanjem od $k+n-1$ elemenata među kojma ima k elemenata jedne vrste i $n-1$ elemenata druge vrste, pa je njihov broj:

$$\left|\left\{f|f:\{1,...,k\}\to\{1,...,n\}\wedge f\nearrow\right\}\right| = \overline{C_k^n} = \frac{(k+n-1)!}{k!\cdot(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Teorema 3.36 $\overline{C_k^n} = P_{k,n-1}(k+n-1) = \frac{(k+n-1)!}{k!\cdot(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$ *jednak je sledećim brojevima:*

- *broju kombinacija s ponavljanjem od n elemenata k-te klase,*
- *broju neopadajućih funkcija skupa $\{1,2,...,k\}$ u skup $\{1,2,...,n\}$,*

- *broju permutacija s ponavljanjem od $k + n - 1$ elemenata među kojima je k međusobno jednakih i $n - 1$ međusobno jednakih,*

- *broju svih rešenja jednačine $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k$, gde su nepoznate $k_1, k_2, \ldots, k_n$ iz skupa $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$, a k i n dati prirodni brojevi,*

- *broju svih raspoređivanja k kuglica koje se ne razlikuju u n kutija koje se razlikuju, tako da neke kutije mogu biti i prazne.*

- *broju svih kombinacija bez ponavljanja k-te klase od $n + k - 1$ elemenata.*

Zadatak 3.37 *Dokazati da broj svih rešenja jednačine $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k$ iznosi $\frac{(k+n-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$, gde su nepoznate $k_1, k_2, \ldots, k_n$ iz skupa $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, a k i n dati prirodni brojevi.*

Primer 3.38 *Odredi broj $s(n, k)$ sirjektivnih funkcija skupa $A = \{1, ..., n\}$ u skup $B = \{1, ..., k\}$.*

Ako je $n < k$, tada je traženi broj 0, a ako je $n = k$, traženi broj je $n!$ Neka je sada $n > k$.
Neka je $|A_0| = a_0$ broj svih funkcija skupa A u skup B, tj. $a_0 = k^n$. Neka je A_5 skup svih funkcija $f : A \to B$ takvih da se element (na primer) 5 nikada ne pojavljuje kao slika, tj. da važi $(\forall x \in A)\ f(x) \neq 5$ i neka je $|A_5| = |A_i| = a_1$. Tada je očevidno $a_1 = (k - 1)^n$.
Neka je A_i skup svih funkcija $f : A \to B$ takvih da se neki fiksni element $i \in B = \{1, 2, ..., k\}$ nikada ne pojavljuje kao slika, tj. $(\forall x \in A)\ f(x) \neq i$. Tada je:
1. $|A_i| = a_1 = (k - 1)^n$ za svako $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$.
2. Za svaki prirodni broj $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$ i za svaku permutaciju $(j_1, \cdots, j_k)$ skupa $\{1, \cdots, k\}$, važi $|A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_i}| = a_i = (k - i)^n$.
Sada je jasno da skup svih funkcija $f : A \to B$ u kojima se uvek pojavljuju slika 1 i slika 2 ... i uvek pojavljuje slika k, jeste skup svih sirjektivnih funkcija skupa A u skup B, tj. skup $\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_k}$, a po teoremi 1.12 broj elemenata toga skupa jednak je $s(n, k) = |\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_k}| =$
$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}a_i = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k - i)^n = \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{k}{i}(k - i)^n \overset{k-i=j}{=\!=\!=} (-1)^k\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}j^n$
Pokazati da je $s(n, k) = S_k^n \cdot k!$ gde je S_k^n broj svih particija skupa od n elemenata na k nepraznih disjunktnih podskupova. Videti definiciju 1.13 i primere koji slede.

Teorema 3.39 *Neka su $A = \{1, 2, ..., n\}$, $B = \{1, 2, ..., k\}$ i $n < k$. Tada je*

1. $|\{f \mid f : A \to B\}| = k^n$
2. $|\{f \mid f : A \overset{1-1}{\to} B\}| = \frac{k!}{(k-n)!}$
3. $|\{f\nearrow \mid f : A \to B\}| = \binom{k}{n}$
4. $|\{f\underline{\nearrow} \mid f : A \to B\}| = \binom{n+k-1}{n}$
5. $|\{f \mid f : A \overset{na}{\to} B\}| = 0$
6. $|\{f \mid f : A \xrightarrow[1\text{-}1]{na} B\}| = 0$
7. $|\{f \mid f : A \to A\}| = n^n$
8. $|\{f \mid f : A \overset{1-1}{\to} A\}| = n!$
9. $|\{f\nearrow \mid f : A \to A\}| = 1$
10. $|\{f\underline{\nearrow} \mid f : A \to A\}| = \binom{2n-1}{n}$
11. $|\{f \mid f : A \overset{na}{\to} A\}| = n!$
12. $|\{f \mid f : A \xrightarrow[na]{1-1} A\}| = n!$
13. $|\{f \mid f : B \to A\}| = n^k$
14. $|\{f \mid f : B \overset{1-1}{\to} A\}| = 0$
15. $|\{f\nearrow \mid f : B \to A\}| = 0$
16. $|\{f\underline{\nearrow} \mid f : B \to A\}| = \binom{k+n-1}{k}$
17. $|\{f \mid f : B \overset{na}{\to} A\}| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+n}\binom{n}{i}i^k$
18. $|\{f \mid f : B \xrightarrow[1\text{-}1]{na} A\}| = 0$
19. $|\{f \mid f : B \to B\}| = k^k$
20. $|\{f \mid f : B \overset{1-1}{\to} B\}| = k!$
21. $|\{f\nearrow \mid f : B \to B\}| = 1$
22. $|\{f\underline{\nearrow} \mid f : B \to B\}| = \binom{2k-1}{k}$
23. $|\{f \mid f : B \overset{na}{\to} B\}| = k!$
24. $|\{f \mid f : B \xrightarrow[na]{1-1} B\}| = k!$
25. $\left|\left\{f \mid f : A \to A \wedge \left|\{x \mid f(x) = i\}\right| = k_i\right\}\right| = \frac{n!}{k_1!\,k_2! \ldots k_n!}$.

Rešenje za br. 17 je i $s_{n,k} = S_k^n \cdot k! = (-1)^n \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}i^k$.

Broj svih proizvoljnih funkcija jednak je broju varijacija s ponavljanjem, broj injektivnih funkcija broju varijacija bez ponavljanja, broj bijektivnih funkcija broju permutacija bez ponavljanja. Broj rastućih funkcija jednak je broju kombinacija bez ponavljanja, broj neopadajućih funkcija broju kombinacija s ponavljanjem, tj. broju nekih permutacija s ponavljanjem. Broj funkcija sa fiksiranim brojevima pojavljivanja slika jednak je broju permutacija s ponavljanjem. Broj svih sirjektivnih funkcija skupa od n elemenata u skup od $k < n$ elemenata jednak je broju particija S_k^n pomnoženog sa $k!$ Prema tome, prebrojavanjem skupa funkcija određenog tipa izvršeno je istovremeno i prebrojavanje permutacija, varijacija, kombinacija s ponavljanjem i bez njega i particija skupova, što je vrlo važno istaći.

Zadatak 3.40 *Dati su skupovi* $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *i* $B = \{a, b, c\}$ *i binarne relacije, tj. bilo kakvi skupovi uređenih parova:*

$f_1 = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$,

$f_2 = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, a), (5, b), (1, c)\}$,

$f_3 = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, a), (5, a)\}$,

$f_4 = \{(1, c), (2, b), (3, b), (5, a), (4, c)\}$.

a) Da li su f_i *funkcije?*

b) Da li su f_i *funkcije skupa* A *u skup* B*?*

c) Ako su f_i *funkcije skupa* A *u skup* B*, da li su one injektivne?*

d) Ako su f_i funkcije skupa A u skup B, da li su one sirjektivne?
e) Da li se može definisati injektivna funkcija skupa A u skup B?

Rešenje

a) Samo f_2 nije funkcija zbog $(1, a) \in f_2 \wedge (1, c) \in f_2$.

b) Funkcije f_3 i f_4 jesu funkcije skupa A u skup B dok f_1 nije funkcija skupa A u skup B, već skupa $\{1, 2, 3\}$ u skup B.

c) Treba ispitivati samo f_3 i f_4. Međutim, one nisu injektivne zbog toga što je, na primer, $f_3(1) = f_3(2) = a$ i $f_4(2) = f_4(3) = b$.

d) Sirjektivna je samo f_4.

e) Ne može se definisati injektivna funkcija skupa A u skup B jer skup A „ima više elemenata” od skupa B pa bi se dva različita originala morala preslikavati u istu sliku, što je protivrečno injektivnosti. Funkcija „konačnog” skupa A u „konačan” skup B može biti injektivna ako i samo ako je broj elemenata skupa A manji ili jednak broju elemenata skupa B.

Zadatak 3.41 *Neka su $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ i binarne relacije, tj. neki skupovi uređenih parova $f_1 = \{(1, a), (2, b), (3, c), (1, d)\}$, $f_2 = \{(1, a), (2, a)\}$ i $f_3 = \{(1, d), (2, a), (3, c)\}$. Odgovoriti na pitanja a), b), c), d) iz prethodnog zadatka za ove skupove i relacije.*

e) Da li se može definisati sirjektivna funkcija skupa A u skup B?

Rešenje

a) Samo f_1 nije funkcija zbog $(1, a) \in f_1$ i $(1, d) \in f_1$.

b) Funkcija f_3 jeste funkcija skupa A u skup B dok funkcija f_2 nije funkcija skupa A u skup B, već skupa $\{1, 2\}$ u skup B.

c) Funkcija f_2 nije injektivna zbog toga što je $f_2(1) = f_2(2)$ dok f_3 jeste injektivna.

d) Treba ispitivati samo f_3. Međutim, funkcija f_3 nije sirjektivna.

e) Ne može se definisati sirjektivna funkcija skupa A u skup B jer skup A ima „manje elemenata" od skupa B pa bi jedan original morao da se preslikava u dve različite slike, što je protivrečno definiciji funkcije. Funkcija „konačnog" skupa A u „konačan" skup B može biti sirjektivna ako i samo ako skup A ima „više ili jednako elemenata" u odnosu na skup B.

Na osnovu zadataka 3.40 i 3.41 zaključuje se da dva „konačna" skupa imaju isti broj elemenata ako i samo ako između njih postoji bijekcija. To upućuje na definiciju:

Definicija 3.42 *Neka su A i B skupovi i neka postoji bijektivna funkcija $f : A \underset{na}{\overset{1-1}{\longrightarrow}} B$. Tada se kaže da skupovi A i B imaju isti broj elemenata (isti kardinalni broj ili da su iste moći) i to se zapisuje sa $Card(A) = Card(B)$ ili $|A| = |B|$.*

Teorema 3.43 *Konačan skup A ima n elemenata ako i samo ako postoji bijekcija $f : A \underset{na}{\overset{1-1}{\longrightarrow}} \{1, 2, \ldots, n\}$ i to se zapisuje sa $Card(A) = n$ ili, kao što je već rečeno, $|A| = n$. Skupovi s istim brojem elemenata kao skup prirodnih brojeva nazivaju se prebrojivi skupovi, što se označava sa $\aleph_0$ i čita „alef nula". Za skupove s istim brojem elemenata kao skup realnih brojeva kaže se da imaju* **c** *(kontinuum) elemenata.*

Iz zadataka 3.40 i 3.41 takođe se zaključuje da se „konačan" skup A ne može bijektivno preslikavati na svoj pravi podskup, što može da posluži za karakterizaciju „konačnih" skupova. Preciznije o tome govori sledeća definicija.

Definicija 3.44 *Skup je beskonačan ako i samo ako se može injektivno preslikati na svoj pravi podskup. U suprotnom on je konačan.*

Zadatak 3.45 *Dokazati da je skup* $\mathbb{N}$ *beskonačan.*

Rešenje Posmatrati funkciju $f = \{(n, 2n) | n \in \mathbb{N}\}$. Funkcija f očigledno je bijektivna funkcija skupa $\mathbb{N}$ na skup svih parnih brojeva koji je pravi podskup skupa prirodnih brojeva.

Zadatak 3.46 *Dokazati da skup racionalnih brojeva* $\mathbb{Q}$ *ima isto toliko elemenata koliko i skup prirodnih brojeva* $\mathbb{N}$.

Rešenje Posmatrati niz pozitivnih racionalnih brojeva:

$\frac{1}{1},$

$\frac{1}{2}, \frac{2}{1},$

$\frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1},$

$\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1},$

$\frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1},$

....

....

Očevidno je da će se **svaki** pozitivan racionalni broj pojaviti u ovom nizu bar jednom. Posle prvog pojavljivanja nekog racionalnog broja u ovom nizu, ukloniće se sva dalja pojavljivanja toga broja u tom nizu. Ako se to primeni na svaki racionalni broj u tom nizu, dobiće se niz **svih** pozitivnih racionalnih brojeva. Ako se između svaka dva člana toga niza upiše prethodni, sa znakom minus i ispred celog niza upiše 0, dobiće se niz svih racionalnih brojeva. Kako je uspelo da se poređa u niz skup svih racionalnih brojeva, to znači da je konstruisana (definisana) bijekcija skupa prirodnih brojeva na skup racionalnih brojeva, pa je dokaz time završen.

Teorema 3.47 *Ako su skupovi* A *i* B *konačni i* $|A| = |B|$, *tada iz injektivnosti funkcije* f *skupa* A *u skup* B *sledi obavezno i njena sirjektivnost.*

Da ovo ne važi za beskonačne skupove sledi iz primera funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ definisane sa $f(n) = n$ za svaki prirodni broj $n \in \mathbb{N}$, gde je $\mathbb{Q}$ skup svih racionalnih brojeva. Funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ očevidno je injektivna, ali nije sirjektivna jer se niko ne prelikava na primer u $\frac{3}{7}$, a $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$.

Teorema 3.48 *Ako su skupovi* A *i* B *konačni i* $|A| = |B|$, *tada iz sirjektivnosti funkcije* f *skupa* A *u skup* B *obavezno sledi i njena injektivnost odnosno bijektivnost.*

Da ovo ne važi za beskonačne skupove sledi iz primera funkcije $f : \mathbb{Q} \to N$ definisane sa $f(\frac{p}{q}) = q$ za svaki racionalni broj $\frac{p}{q}$, gde su $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ i p i q uzajamno prosti, jer $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ i funkcija $f : \mathbb{Q} \to N$ jeste sirjektivna a nije injektivna.

Zadatak 3.49 *Dokazati da ne postoji bijekcija između skupa prirodnih brojeva i skupa* $(0,1) = \{x \mid 0 < x < 1 \land x \in \mathbb{R}\}$, *tj. da skup* $(0,1)$ *nije prebrojiv skup.*

Dokaz: Izvesti dokaz kontradikcijom. Poći od pretpostavke da je skup prebrojiv, tj. da se SVI elementi (brojevi) skupa $(0,1)$ mogu poređati u beskonačni niz, jedan ispod drugoga. Kako se svaki broj iz $(0,1)$ može na jedinstven način zapisati u obliku beskonačnog decimalnog zapisa, u kome ne postoji cifra a_{mn} posle koje su sve devetke, to pomenuti niz SVIH brojeva iz $(0,1)$ glasi:

$$\begin{array}{l} 0, a_{11}a_{12}a_{13}\ldots a_{1i}\ldots a_{1j}\ldots \\ 0, a_{21}a_{22}a_{23}\ldots a_{2i}\ldots a_{2j}\ldots \\ \vdots \\ 0, a_{i1}a_{i2}\,a_{i3}\,\ldots a_{ii}\ldots a_{ij}\ldots \\ \vdots \end{array}$$

gde je $a_{ij} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ j-ta cifra i-tog broja iza zareza u tom nizu. Međutim, postoji broj $0{,}b_1b_2b_3\ldots b_i\ldots$ takav da je $b_i = 0$ za $a_{ii} \neq 0$, $b_i = 1$ za $a_{ii} = 0$ (Kantorov dijagonalni postupak). Taj broj očevidno pripada skupu $(0,1)$ i nije u prethodnom nizu SVIH brojeva iz $(0,1)$, što je kontradiktorno pretpostavci da se skup svih brojeva iz $(0,1)$ može „poređati" u niz, tj. bijektivno preslikati na $\mathbb{N}$. Napomena $0,2363999\ldots = 0,2363\dot{9} = 0,2364 = 0,2364000\ldots$ i u ovom dokazu koristio se samo poslednji zapis zbog jedinstvene reprezentacije realnog broja iz $(0,1)$ decimalnim beskonačnim zapisom.

Restrikcija $f_{(0,1)}$ funkcije $f(x) = \mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}x)$ nad domenom $(0,1)$ jeste bijekcija skupa $(0,1)$ i $\mathbb{R}^+$, a funkcija $g(x) = \ln x$ je bijekcija skupa $\mathbb{R}^+$ i skupa $\mathbb{R}$, pa je njihova kompozicija $g \circ f_{(0,1)}$ bijekcija skupa $(0,1)$ i skupa $\mathbb{R}$. To znači da svih realnih brojeva ima isto toliko koliko i realnih brojeva iz intervala $(0,1)$, tj. $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$. Na osnovu te bijekcije $g \circ f_{(0,1)}$ i prethodnog zadatka sledi da skup svih realnih brojeva $\mathbb{R}$ nije prebrojiv, jer $(0,1)$ nije prebrojiv! (zadatak 3.49) Za bijekciju skupa $\mathbb{R}$ i skupa $(0,1)$ može se uzeti i $f(x) = \frac{2^x}{1+2^x}$.

Na osnovu 3.42 3.46 i 3.49 sledi da je

$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$ i $|\mathbb{R}| = |(0,1)| = \boldsymbol{C}$, kao i $\aleph_0 < \boldsymbol{C}$. Da li postoji skup čiji je kardinalni broj između $\aleph_0$ i $\boldsymbol{C}$? Odgovor na ovo pitanje, poznato kao hipoteza kontinuuma, dao je P. Cohen 1964. godine i glasi da to nije posledica ostalih aksioma teorije skupova, tako da se postojanje takvoga skupa može prihvatiti ili ne prihvatiti kao nov aksiom.

Primer 3.50 *Neka su* $A = \{1,2,3\}$ *i* $B = \{2,3,4\}$ *i neka je* $f_1 = \{(1,3),(2,4)\}$, $f_2 = \{(1,3),(3,4),(2,3)\}$, $f_3 = \{(3,3),(2,2),(1,4)\}$, $f_4 = \{(3,3),(2,3),(1,3)\}$. *Popuniti obavezno sa* **da** *ili* **ne**:

$\setminus$	f_i *je* F	$f_i : A \to B$	$f_i : A \overset{1-1}{\to} B$	$f_i : A \overset{na}{\to} B$	$f : A \underset{na}{\overset{1-1}{\to}} B$
f_1					
f_2					
f_3					
f_4					

Zadatak 3.51 $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b,c\}$, $f_1 = \{(1,a),(2,b)\}$, $f_2 = \{(1,a),(2,b),(3,b)\}$, $f_3 = \{(1,c),(2,b),(3,a)\}$, $f_4 = \{(1,a),(1,b),(1,c)\}$, $f_5 = \{(1,a),(2,b),(3,a)\}$. **Svako** *polje obavezno popuniti sa* **da** *ili* **ne**.

$\setminus$	f_i *je funkcija*	$f_i : A \longrightarrow B$	$f_i : A \xrightarrow{1-1} B$	$f_i : A \xrightarrow{na} B$
f_1				
f_2				
f_3				
f_4				
f_5				

Zadatak 3.52

$f_1 = \{(x, x+1) | x \in \mathbb{N}\}$, $f_2 = \{(x, x-1) | x \in \mathbb{N}\}$, $f_3 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$, $f_4 = \{(x+1, x) | x \in \mathbb{N}\}$. **Svako** *polje obavezno popuniti sa* **da** *ili* **ne**.

$\setminus$	f_i *je funkcija*	$f_i : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$	$f_i : \mathbb{N} \xrightarrow{na} \mathbb{N}$	$f_i : \mathbb{N} \xrightarrow{1-1} \mathbb{N}$
f_1	T	T		T
f_2	T			
f_3	T			
f_4	T			

$f_4 : \mathbb{N} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{N}$	$f_4 : \mathbb{N} \setminus \{1\} \xrightarrow{1-1} \mathbb{N}$	$f_4 : \mathbb{N} \setminus \{1\} \xrightarrow{na} \mathbb{N}$	$f_4 : \mathbb{N} \xrightarrow[na]{1-1} \mathbb{N}$
T	T	T	

Zadatak 3.53 *Odrediti domene i kodomene (antidomene), ispitati injektivnost i naći inverzne funkcije sledećih funkcija, ukoliko postoje.*

a) $f = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$; *b)* $f = \{(x, 3x+4) | x \in \mathbb{R}\}$;

c) $f = \{(x, x^3) | x \in \mathbb{R}\}$; *d)* $f = \{(x, x^2) | x \in \mathbb{R}\}$;

e) $f = \{(x, x^2) | x \in \mathbb{R}^+\}$; *f)* $f = \{(x, 2^x) | x \in \mathbb{R}\}$;

g) $f = \{(x, |x|) | x \in \mathbb{R}\}$; *h)* $f = \left\{\left(x, \frac{2x-1}{5-3x}\right) | x \in \mathbb{R} \wedge x \neq \frac{5}{3}\right\}$;

i) sin; *j)* cos; *k)* tg.

Funkcije, na primer

$$f = \left\{ \left(x, \frac{2x-1}{5-3x} \right) | x \in \mathbb{R} \wedge 5 - 3x \neq 0 \right\}$$

obično se kraće označavaju samo sa $f(x) = \frac{2x-1}{5-3x}$, a funkcije konačnih skupova, na primer $f = \{(1,a),(2,c),(3,b)\}$, zapisivaće se kao

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & c & b \end{pmatrix}.$$

Rešenje

a) $\mathcal{D}(f) = \{1,2,3\}$, $\mathcal{A}(f) = \{2,3,4\}$ i $f^{-1} = \{(2,1),(3,2),(4,3)\}$.

b) $\mathcal{D}(f) = \mathcal{A}(f) = \mathbb{R}$. Kako je jednačina $y = 3x+4$ jednoznačno rešiva po x za svako $y \in \mathbb{R}$ odnosno $x = \frac{y-4}{3}$, to znači da je f injektivna i da je $f^{-1} = \{(3x+4,x)|x \in \mathbb{R}\} = \left\{\left(y, \frac{y-4}{3}\right)|y \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\left(x, \frac{x-4}{3}\right)|x \in \mathbb{R}\right\}$;

c) $\mathcal{D}(f) = \mathcal{A}(f) = \mathbb{R}$ i f je injektivna zbog jednoznačne rešivosti jednačine $y = x^3$ po x za svako $y \in \mathbb{R}$ odnosno $x = \sqrt[3]{y}$. $f^{-1} = \{(x^3,x)|x \in \mathbb{R}\} = \{(y,\sqrt[3]{y})|y \in \mathbb{R}\} = \{(x,\sqrt[3]{x})|x \in \mathbb{R}\}$;

d) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} = \mathbb{R} \backslash \mathbb{R}^-$. f nije injektivna zato što je, na primer, $f(-2) = f(2)$;

e) $\mathcal{D}(f) = \mathcal{A}(f) = \mathbb{R}^+$ i f jeste injektivna jer jednačina $y = x^2$ jeste jednoznačno rešiva po x za svako $y \in \mathbb{R}^+$. Ako uvedemo oznaku $\sqrt{y} = x$ za $x \geq 0 \wedge x^2 = y$ možemo pisati $f^{-1} = \{(x^2,x)|x \in \mathbb{R}^+\} = \{(y,\sqrt{y})|y \in \mathbb{R}^+\} = \{(x,\sqrt{x})|x \in \mathbb{R}^+\}$;

f) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}(f) = \mathbb{R}^+$, f je injektivna, i ako se uvede oznaka $x = \log_2 y$ za $2^x = y$, može se pisati

$$f^{-1} = \{(2^x,x)|x \in \mathbb{R}\} = \{(y,\log_2 y)|y \in \mathbb{R}^+\} = \{(x,\log_2 x)|x \in \mathbb{R}^+\};$$

g) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ i f nije injektivna zato što je, na primer, $|-3| = |3|$;

h) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{5}{3}\right\}$, $\mathcal{A}(f) = \mathbb{R} \backslash \left\{-\frac{2}{3}\right\}$ i f je injektivna jer je jednačina $y = \frac{2x-1}{5-3x}$ jednoznačno rešiva po x u skupu $\mathbb{R} \backslash \left\{\frac{5}{3}\right\}$ za svako $y \in \mathbb{R} \backslash \left\{-\frac{2}{3}\right\}$, to jest $x = \frac{5y+1}{2+3y}$, pa je

$$f^{-1} = \left\{\left(\frac{2x-1}{5-3x}, x\right)|x \in \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{5}{3}\right\}\right\} = \left\{\left(y, \frac{5y+1}{2+3y}\right)|y \in \mathbb{R} \backslash \left\{-\frac{2}{3}\right\}\right\}$$
$$= \left\{\left(x, \frac{5x+1}{2+3x}\right)|x \in \mathbb{R} \backslash \left\{-\frac{2}{3}\right\}\right\} \text{ tj. } f^{-1}(x) = \frac{5x+1}{2+3x};$$

i) Iz definicije funkcije sin (sinus) vidi se da je $\mathcal{D}(\sin) = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}(\sin) = \{x| -1 \leq x \leq 1\} = [-1,1]$. Vidi se takođe da sin nije injektivna zato što je, na primer, $\sin\frac{\pi}{2} = \sin(-\frac{3\pi}{2}) = \sin\frac{5\pi}{2}$ itd. Prema tome, sinus nema sebi inverznu funkciju, ali ako se posmatra restrikcija te funkcije nad domenom $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, odnosno ako se uzmu samo oni uređeni parovi od funkcije sinus čije su prve komponente iz $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, onda će ta nova funkcija biti injektivna i obeležavaće se simbolom $\sin_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$. Kako je nova funkcija sinus injektivna, ona ima sebi inverznu funkciju koja se obeležava sa $\sin^{-1}_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ ili arcsin. Znači:

$$\sin^{-1}_{[-\frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2}]} = \arcsin = \left\{(\sin x, x)|x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right\} =$$

$$\{(y, \arcsin y)|y \in [-1,1]\} = \{(x, \arcsin x)|x \in [-1,1]\};$$

j) Iz definicije funkcije cos (kosinus) sledi da je $\mathcal{D}(\cos) = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}(\cos) = [-1,1]$ i kosinus nije injektivna zato što je, na primer, $\cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2}$ itd. Prema tome, kosinus nema sebi inverznu funkciju. Ali ako se posmatra restrikcija te funkcije nad domenom $[0,\pi]$ odnosno uzmu samo oni uređeni parovi iz funkcije kosinus čije su prve komponente iz $[0,\pi]$, onda će ta nova funkcija biti injektivna i beležiće se simbolom $\cos_{[0,\pi]}$. Kako je sada nova funkcija kosinus injektivna, ona ima sebi inverznu funkciju koja se obeležava sa $\cos^{-1}_{[0,\pi]}$ ili arccos. Znači:

$$\cos^{-1}_{[0,\pi]} = \arccos = \{(\cos x, x)|x \in [0,\pi]\} =$$

$$= \{(y, \arccos y)|y \in [-1,1]\} = \{(x, \arccos x)|x \in [-1,1]\};$$

k) Iz definicija funkcije tg (tangens) sledi:

$$\mathcal{D}(\mathrm{tg}) = \mathbb{R}\backslash\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}|k \in \mathbb{Z}\right\}, \quad \mathcal{A}(\mathrm{tg}) = \mathbb{R}.$$

Funkcija tg nije injektivna zato što je, na primer, $\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4} = \mathrm{tg}\,\frac{5\pi}{4}$ itd. Restrikcija te funkcije nad domenom $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, odnosno skup svih uređenih parova funkcije tg čije su prve komponente iz $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ jeste injektivna. Ona se obeležava simbolom $\mathrm{tg}_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$ i zbog injektivnosti ona ima sebi inverznu funkciju $\mathrm{tg}^{-1}_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$ koja se obeležava još i simbolom arctg. Znači

$$\mathrm{tg}^{-1}_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} = \mathrm{arctg} = \left\{(\mathrm{tg}\, x, x)|x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right\} =$$

$$= \{(y, \mathrm{arctg}\, y)|y \in \mathbb{R}\} = \{(x, \mathrm{arctg}\, x)|x \in \mathbb{R}\}.$$

Neka funkcija $f : A \overset{na}{\to} B$ nije injektivna i neka je $f_C : C \to B$ restrikcija funkcije f ($C \subset A, f_C \subset f$) koja jeste injektivna. Tada $f(f_C^{-1}(x)) = x$ jeste tačno za svako x za koje je i definisana ta jednakost (tj. za $x \in f_C(C) \subseteq B$), a $f_C^{-1}(f(x)) = x$ nije tačno za svako x za koje je i definisana ta jednakost, već samo za $x \in C$. Da li je $f_C : C \to B$ sirjektivna? Naći potreban i dovoljan uslov da bi $f_C : C \to B$ bila sirjektivna!

Na primer, $f = \binom{1234}{abbc}$ je neinjektivna funkcija skupa $A = \{1,2,3,4\}$ u skup $B = \{a,b,c\}$, a $f_C = \binom{134}{abc}$ njena injektivna restrikcija nad domenom $C = \{1,3,4\}$, tj. injektivna funkcija skupa C u skup B.

Prikazati prethodne tvrdnje na tri važna primera, odnosno za funkcije

$$f(x) = x^2 \qquad f(x) = \cos x \qquad f(x) = \operatorname{tg} x.$$

$(\sqrt{x})^2 = x$ je tačno za svako x za koje je i definisano jer je

$$f(x) = x^2, \qquad B = C = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \qquad \boxed{f_C^{-1} \overset{def}{=} \sqrt{}}$$

$\sqrt{x^2} = x$ nije tačno za svako x za koje je i definisano, već samo za $x \in C = [0, \infty)$.

Zahvaljujući definicijama $f_C^{-1} \overset{def}{=} \sqrt{}$ i $|x| \overset{def}{=} \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, sledi da je

Teorema 3.54 $\sqrt{x^2} = |x|$.

Dalje se vidi da je $\cos(\arccos x) = x$ tačno za svako x za koje je i definisano, jer je u ovom primeru $f(x) = \cos x$, $C = [0, \pi]$, $\boxed{f_C^{-1} \overset{def}{=} \arccos}$, dok $\arccos(\cos x) = x$ nije tačno za svako x za koje je i definisano, već samo za $x \in C = [0, \pi]$. Lako se proverava da

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists! k \in \mathbb{Z}) \ \boxed{\arccos(\cos x) = |x + 2k\pi| \in [0, \pi]},$$

gde se $k \in \mathbb{Z}$ mora birati tako da bude $x + 2k\pi \in [-\pi, \pi]$, tj. da bude $|x + 2k\pi| \in [0, \pi]$, što je očevidno uvek moguće.

Treba primetiti da je $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ tačno za svako $x \in \mathbb{R}$ jer je u ovom primeru $f(x) = \operatorname{tg} x$, $C = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\boxed{f_C^{-1} \overset{def}{=} \operatorname{arctg}}$, dok $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$ nije tačno za svako $x \in \mathbb{R}$, već samo za $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Lako se proverava da je $\boxed{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x + k\pi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$, gde se $k \in \mathbb{Z}$ bira tako da bude $x + k\pi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, što je uvek moguće.

Za svaku injektivnu funkciju f skupa A **na** skup B uvek važi da je $f^{-1}(f(x)) = x$ za svako x iz A i $f(f^{-1}(x)) = x$ za svako x iz B, međutim $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ tačno je za svako $x \in \mathbb{R}$, a $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$ nije tačno za svako $x \in \mathbb{R}$, već samo za $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, iako

$f(x) = \operatorname{arctg} x$ jeste injektivna funkcija skupa $\mathbb{R}$ **u** skup $\mathbb{R}$. Zašto? Odrediti:

$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) =?$, $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) =?$, $\sin(\arcsin x) =?$ i $\arcsin(\sin x) =?$

1. $\arcsin(\sin x) = \begin{cases} x + 2k\pi & \text{za} \quad x + 2k\pi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - (x + 2k\pi) & \text{za} \quad x + 2k\pi \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \end{cases}$

2. $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x + k\pi \in (0, \pi)$

za svako x za koje su definisani i za neko $k \in \mathbb{Z}$.

Definicija injektivne funkcije f kaže da za svako x iz domena funkcije f mora da važi $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. Da li prethodna implikacija može da se primeni i na neinjektivne funkcije? Odgovor je potvrdan i sadrži se u sledećoj teoremi.

Teorema 3.55 *Ako je f neinjektivna funkcija, a njena restrikcija nad domenom C injektivna, tada važi:*

$$\Big(a \in C \ \wedge \ b \in C \ \wedge \ f(a) = f(b)\Big) \ \Rightarrow \ a = b.$$

Na primer jasnoje da nije uvek tačna implikacija $\sin a = \sin b \Rightarrow a = b$, ali je tačno $\big(a \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \wedge b \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \wedge \sin a = \sin b\big) \Rightarrow a = b$.

Dokaz teoreme 3.55 posledica je samo definicije injektivnosti pa faktički nema šta da se dokazuje, ali njena važnost u dokazu raznih identiteta veoma je bitna, što pokazuje sledeći primer.

Zadatak 3.56 *Dokazati da važi sledeća implikacija:* $x \in [1, \infty) \Rightarrow \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi - 2 \operatorname{arctg} x$

Dokaz: I leva i desna strana jednakosti koju dokazujemo definisane su za svako $x \in \mathbb{R}$, jer domen funkcije arctg jeste $\mathbb{R}$, dok zbog

$$\Big(-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1\Big) \Leftrightarrow \Big((x+1)^2 \geq 0 \wedge (x-1)^2 \geq 0\Big)$$

sledi da je i $\arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ definisano za svako $x \in \mathbb{R}$, jer je domen funkcije arcsin $[-1, 1]$.

Sada primeniti teoremu 3.55 tako što se uzme $a = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ i $b = \pi - 2 \operatorname{arctg} x$. Prvo treba pokazati da za svako $x \in [1, \infty)$ važi

$$a = \arcsin \frac{2x}{1+x^2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] = C \ \text{ i } \ b = \pi - 2 \operatorname{arctg} x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] = C,$$

jer su tada brojevi a i b iz istoga intervala injektivnosti $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ funkcije sinus (sin). Prva tvrdnja sledi iz same definicije funkcije arkus sinus

$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, dok druga sledi iz

$$x \in [1, \infty) \Rightarrow \operatorname{arctg} x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow -2 \operatorname{arctg} x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \pi - 2 \operatorname{arctg} x \in (0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \pi - 2 \operatorname{arctg} x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Preostalo je još samo da se dokaže da je $\sin a = \sin b$, tj. da je $\sin(\arcsin \frac{2x}{1+x^2}) = \sin(\pi - 2 \operatorname{arctg} x)$. Leva strana ove jednakosti je očito jednaka $\frac{2x}{1+x^2}$, pa treba pokažati da je i desna strana te jednakosti jednaka $\frac{2x}{1+x^2}$. Znači, stoji da je $\sin(\pi - 2 \operatorname{arctg} x) = \sin(2 \operatorname{arctg} x) =$
$= 2 \sin(\operatorname{arctg} x) \cos(\operatorname{arctg} x) = 2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x}{1+x^2}$. Videti 3.66.

Zadatak 3.57 *Odrediti domene i kodomene (antidomene), ispitati injektivnost i naći inverzne funkcije sledećih funkcija, ukoliko postoje.*
a) $f(x,y) = (2x+y, 3x+2y)$ **b)** $f(x,y) = (2x+y, -6x-3y)$

Zadatak 3.58 *Da li postoje takvi realni brojevi a i b da za svaki realni broj iz intervala $(-\infty, -1]$ važi* $\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = a + b \operatorname{arctg} x$?

Zadatak 3.59 *Da li postoje takvi realni brojevi a i b da za svaki realni broj iz intervala $[-1, 1]$ važi* $\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = a + b \operatorname{arctg} x$?

Zadatak 3.60 *Ako su $f(x) = 2x+3$ i $g(x) = x^2 - 2$, odrediti:*
a) $f(f(x))$; *b)* $f(g(x))$; *c)* $g(f(x))$; *d)* $g(g(x))$.

Rešenje a) $f(f(x)) = 2f(x) + 3 = 2(2x+3) + 3 = 4x + 9$;
b) $f(g(x)) = 2g(x) + 3 = 2(x^2-2) + 3 = 2x^2 - 1$;
c) $g(f(x)) = (f(x))^2 - 2 = (2x+3)^2 - 2 = 4x^2 + 12x + 7$;
d) $g(g(x)) = (g(x))^2 - 2 = (x^2-2)^2 - 2 = x^4 - 4x^2 + 2$.

Zadatak 3.61 *Konstruisati bar jednu funkciju f tako da:*

a) $f : \mathbb{R} \overset{na}{\rightarrow} [-1,1]$; *b)* $f : \mathbb{R} \overset{na}{\rightarrow} [0,1]$; *c)* $f : \mathbb{R} \overset{na}{\rightarrow} [-2,2]$;
d) $f : \mathbb{R} \overset{na}{\rightarrow} [0,2]$; *e)* $f : \mathbb{R} \overset{na}{\rightarrow} [-3,0]$; *f)* $f : \mathbb{R} \overset{na}{\rightarrow} \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$;
g) $f : \mathbb{R} \underset{na}{\overset{1-1}{\longrightarrow}} \mathbb{R}^+$; *h)* $f : \mathbb{R}^+ \underset{na}{\overset{1-1}{\longrightarrow}} \mathbb{R}$; *i)* $f : [-1,1] \underset{na}{\overset{1-1}{\longrightarrow}} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
j) $f : [-1,1] \underset{na}{\overset{1-1}{\longrightarrow}} [0,\pi]$; *k)* $f : (-1,1) \underset{na}{\overset{1-1}{\longrightarrow}} \mathbb{R}$; *l)* $f : (0,1) \underset{na}{\overset{1-1}{\longrightarrow}} \mathbb{R}$.

Rezultat
a) $f(x) = \sin x$; b) $f(x) = |\sin x|$; c) $f(x) = -2\sin x$;
d) $f(x) = 2|\sin x|$; e) $f(x) = -3|\sin x|$; f) $f(x) = x^2$;
g) $f(x) = 2^x$; h) $f(x) = \log x$; i) $f(x) = \arcsin x$;
j) $f(x) = \arccos x$; k) $f(x) = \operatorname{tg}(\arcsin x)$; l) $f(x) = \log_5(\operatorname{tg}(\arcsin x))$.

Kako je pronađena jedna bijekcija intervala (0,1) na skup realnih brojeva, time je dokazano da realnih brojeva ima isto toliko koliko ima brojeva iz intervala (0,1).

Definicija 3.62 *Neka je $\mathcal{O} : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, funkcija definisana sa $\big(\forall x \in A\big)\mathcal{O}(x) = 0$. Funkcija $\mathcal{O}$ naziva se nula funkcija.*

Zadatak 3.63 *Konstruisati bar dve različite nenula funkcije f i g skupa realnih brojeva u skup realnih brojeva s osobinom da je njihova kompozicija $f \circ g$ nula funkcija, tj. $\mathcal{O} = f \circ g$ odnosno*

$$\big(\forall x \in \mathbb{R}\big)\mathcal{O}(x) = f(g(x)) = 0.$$

Rezultat $f(x) = x^2 - x$ i $g(x) = \operatorname{sgn}(x^2)$.
Definicija funkcije sgn glasi:
$\operatorname{sgn}(x) = -1$ za $x < 0$, $\operatorname{sgn}(x) = 0$ za $x = 0$ i $\operatorname{sgn}(x) = 1$ za $x > 0$.

Zadatak 3.64 *Odrediti bar dve različite elementarne nenula funkcije f i g definisane u skupu $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ s osobinom da je njihova kompozicija $f \circ g$ nula funkcija.*

Rezultat $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$ i $g(x) = \frac{x}{|x|}$ jer je $(f \circ g)(x) =$
$= f(g(x)) = f(\pm 1) = 0 = \mathcal{O}(x)$ tj. $f \circ g = \mathcal{O}$.

Zadatak 3.65 *Ispitati da li je f funkcija i, ako jeste, odrediti njen domen i kodomen (skup slika). Ispitati da li je funkcija injektivna i izračunati: $f(-3)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(4)$, ako je $f = \{(x, 1-x) | x \in (-\infty, -2)\} \cup \{(x, x^2+1) | x \in [-1, 3)\} \cup \{(x, x-2) | x \in (3, \infty)\}$.*

Rešenje Kako se nijedan realan broj ne preslikava sa f u dva različita realna broja, f jeste funkcija i takve funkcije obično se zapisuju:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & x < -2 \\ x^2 + 1 & -1 \leq x < 3 \\ x - 2 & 3 < x \end{cases}$$

$\mathcal{D}(f) = (\mathbb{R} \setminus [-2, -1)) \setminus \{3\} = (-\infty, -2) \cup [-1, 3) \cup (3, \infty)$, $\mathcal{A}(f) = [1, \infty)$ nije injektivna zato što je, na primer, $f(2) = f(7) = 5$.

Zadatak 3.66 *Za koje su realne brojeve definisane i tačne formule: a)* $\sin(\arcsin x) = x$; *b)* $\arcsin(\sin x) = x$; *c)* $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$;
d) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$; *e)* $\cos(\arccos x) = x$; *f)* $\arccos(\cos x) = x$;
g) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$; *h)* $\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;
i) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$; *j)* $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;
k) $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; *l)* $\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$;
m) $\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x$; *n)* $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Rezultat a) $x \in [-1, 1]$; b) $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; c) $x \in \mathbb{R}$;
d) $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; e) $x \in [-1, 1]$; f) $x \in [0, \pi]$; g) $x \in [-1, 1]$;
h) $x \in \mathbb{R}$; i) $x \in [-1, 1]$; j) $x \in \mathbb{R}$; k) $x \in (-1, 1)$;
l) $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$; m) $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; n) $x \in [-1, 1]$.

Zadatak 3.67 *Za koje su realne brojeve x i y definisane i tačne formule:*
a) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$; *b)* $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \pi + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$;
c) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = -\pi + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$; *d)* $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2}$;
e) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = -\frac{\pi}{2}$.

Rezultat: $$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} & \text{za} \quad xy < 1 \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} & \text{za} \quad xy > 1 \land x > 0 \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} & \text{za} \quad xy > 1 \land x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{za} \quad xy = 1 \land x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{za} \quad xy = 1 \land x < 0. \end{cases}$$

Proveriti da je za $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$ i $g(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & x > -1 \\ -\frac{3\pi}{4} & x < -1 \end{cases} \quad \text{i} \quad g(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & x < 1 \\ \frac{3\pi}{4} & x > 1 \end{cases}$$

Izračunati: $\arcsin(\sin \frac{-\sqrt{2}}{2}) = ?$ $\arcsin(\sin 1) = ?$ $\arcsin(\sin 2) = ?$
$\arcsin(\sin 3) = ?$ $\arcsin(\sin 4) = ?$ $\arcsin(\sin 5) = ?$ $\arcsin(\sin 6) = ?$
$\arcsin(\sin 8) = ?$ $\arccos(\cos 6) = ?$ $\arccos(\cos 7) = ?$ $\arccos(\cos \frac{-\sqrt{3}}{2}) = ?$
$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 1) = ?$ $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 2) = ?$ $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 3) = ?$ $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 4) = ?$
$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 5) = ?$ $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 6) = ?$ $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 7) = ?$ $\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = ?$

Zadatak 3.68 *Za koje vrednosti realnih parametara a i b formula* $f(x) = ax + b$ *definiše*
a) *funkciju* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $a, b \in R$
b) *injektivnu funkciju* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $a \neq 0$
c) *sirjektivnu funkciju* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $a \neq 0$
d) *bijektivnu funkciju* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $a \neq 0$
e) *rastuću funkciju* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $a > 0$
f) *neopadajuću funkciju* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $a \geq 0$

Zadatak 3.69 *Napisati bar jednu funkciju $f : S \to S$ ($f \neq i_d$) za koju važi da je $(\forall x \in S)$ $f(f(x)) = x$ (involucija tj. reflektor, odnosno $f \circ f = i_d$ ili $f = f^{-1}$), ako je $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Napomena: i_d je identička funkcija, odnosno $(\forall x \in S)$ $i_d(x) = x$.* $f = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{smallmatrix}\right)$. *Koloiko ima ukupno svih takvih funkcija zajedno sa identičkom i_d?*

Zadatak 3.70 *Za koje vrednosti realnih parametara a, b i c formula* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *definiše*
$a = 0 \neq b$
a) *funkciju* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $a, b, c \in R$
b) *injektivnu funkciju* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
c) *sirjektivnu funkciju* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $=$ b)
d) *bijektivnu funkciju* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $=$ b)
e) *rastuću funkciju* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$a = 0 < b$
f) *neopadajuću funkciju* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
$a = 0 \leq b$

Zadatak 3.71 *Odrediti* $f^{-1}(x)$, $g^{-1}(x)$, $h^{-1}(x)$, $F^{-1}(x)$, $G^{-1}(x)$, $H^{-1}(x)$, $L^{-1}(x)$ *ako su* $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $h(x) = \arccos x$, $F(x) = 2^x$, $G(x) = x^3$, $H(x) = \frac{1}{x}$, $L(x) = \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}$ *i napisati* $\mathcal{D}(f^{-1})$, $\mathcal{D}(g^{-1})$, $\mathcal{D}(h^{-1})$, $\mathcal{D}(F^{-1})$, $\mathcal{D}(G^{-1})$, $\mathcal{D}(H^{-1})$, $\mathcal{D}(L^{-1})$.

Ako se drukčije ne kaže, uvek se podrazumeva da su domeni funkcija „maksimalni" podskupovi od $\mathbb{R}$ u kojima su definisani izrazi koji ih definišu.

Zadatak 3.72 *Date su funkcije* $f_1(x) = 2\log_2 x$;

$$f_2(x) = \log_2 x^2; \qquad f_3(x) = 2\log_2 |x|; \qquad f_4(x) = \frac{2}{\log_x 2}.$$ $D = R^+ \setminus \{1\}$

Ako među datim funkcijama ima jednakih, napisati koje su jednake. Odgovore obrazložiti.

Zadatak 3.73 *Neka je* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *funkcija koja preslikava skup svih uređenih parova realnih brojeva samog sebe definisana izrazom* $f(x,y) = (ax+by, cx+dy)$, *gde su* a,b,c,d *dati realni brojevi. Za koje je vrednosti realnih parametara* a,b,c *i* d *funkcija* f: **a)** *injektivna,*
b) *sirjektivna,* **c)** *bijektivna,* **d)** *ima inverznu* f^{-1} *i odrediti je.*
e) *Odrediti kompoziciju funkcije* f *sa samom sobom, to jest* $f \circ f = ?$

Zadatak 3.74 *Odrediti podskup* $\mathcal{F}$ *skupa* $\{f | f : S \underset{na}{\overset{1-1}{\longrightarrow}} S\}$ *funkcija koje su same sebi inverzne tj. involucije, za* $S = \{1,2,3,4\}$. **Rešenje** $\mathcal{F} =$

$$= \left\{ \binom{1234}{1234}, \binom{1234}{2143}, \binom{1234}{4321}, \binom{1234}{3412}, \binom{1234}{1243}, \binom{1234}{1432}, \binom{1234}{1324}, \binom{1234}{4231}, \binom{1234}{3214}, \binom{1234}{2134} \right\}$$

Ove funkcije su osne i ravanske simetrije koje pravilni tetraedar sa temenima $1,2,3,4$ preslikavaju u samog sebe i identička funkcija.

Zadatak 3.75 *Napisati bar jednu funkciju* $g : S \longrightarrow S$ $(g \neq i_d)$ *za koju važi da je* $(\forall x \in S)$ $g(g(x)) = g(x)$ *(idempotentna tj. projektor, odnosno* $g \circ g = g$*), ako je* $S = \{1,2,3,4\}$. $\qquad g = \binom{1\,2\,3\,4}{}$

Poglavlje 4

BULOVE ALGEBRE

Definicija 4.1 *Neka je* $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *uređena šestorka, gde su 0 i 1 dva različita elementa skupa* B, $+$ *i* $\cdot$ *binarne operacije skupa* B *i* $'$ *unarna operacija skupa* B. *Tada ova šestorka jeste Bulova algebra ako važe sledeći aksiomi:*

$$
\begin{array}{lll}
B_1: & a+b=b+a & ; \; a\cdot b = b\cdot a \\
B_2: & a(b+c) = (a\cdot b)+(a\cdot c) & ; \; a+(b\cdot c) = (a+b)\cdot(a+c) \\
B_3: & a+0=a & ; \; a\cdot 1 = a \\
B_4: & a+a'=1 & ; \; a\cdot a' = 0
\end{array}
$$

za sve a, b, c *iz skupa* B.

Umesto $a \cdot b$, pisaće se kraće ab. Ovde se podrazumeva da operacija $\cdot$ ima prednost u odnosu na operaciju $+$, pa zato se umesto $a + (bc)$ piše samo $a + bc$ i umesto $(ab) + (ac)$ samo $ab + ac$. Aksiomi B_1, B_2, B_3 i B_4 redom se nazivaju komutativnost, distributivnost, postojanje neutralnih elementa i komplementarnost.

Radićemo samo sa konačnim Bulovim algebrama!

Operacija $+$ nazvaće se disjunkcija, operacija $\cdot$ konjunkcija i operącija $'$ negacija, po ugledu na jedan od osnovnih primera (modela) Bulove algebre, Iskaznu algebru u primeru 4.2.

Primer 4.2 $\left(\{\perp, \top\}, \vee, \wedge, \neg, \perp, \top\right)$ *jeste Bulova algebra, gde su binarne operacije* $\vee$, $\wedge$ *i unarna operacija* $\neg$ *definisane sa*

$\vee$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$

$\wedge$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\top$

p	$\neg p$
$\perp$	$\top$
$\top$	$\perp$

Primer 4.3 *Uređena šestorka* $\left(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, {}^c, \emptyset, A\right)$, *gde je* $\mathcal{P}(A)$ *skup svih podskupova skupa* A *(partitivni skup skupa* A*),* $A \neq \emptyset$, *a unarna operacija* ^{c} *definisana sa* $\left(\forall X \in \mathcal{P}(A)\right) X^c = A \setminus X = \{x | x \in A \wedge x \notin X\}$, *jeste Bulova algebra. Koristi se i oznaka* $\overline{X} = X^c$.

Primer 4.4 *Neka je* D_{30} *skup svih delilaca celog broja trideset, tj.* $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$. *Tada je* $(D_{30}, NZS, NZD, {}', 1, 30)$ *Bulova algebra, gde je NZS(m,n) najmanji zajednički sadržalac brojeva* m *i* n, *NZD(m, n) najveći zajednički delilac brojeva* m *i* n, *a operacija* $'$ *definisana sa* $a' = \frac{30}{a}$ *za svaki broj* a *iz* D_{30}.

Primećuje se takozvana dualnost u osmočlanom skupu svih aksioma Bulove algebre, odnosno ako u bilo kojoj aksiomi $+$ i $\cdot$ i 0 i 1 zamene uloge (mesta), dobiće se opet aksioma Bulove algebre. Zbog toga će i **skup svih teorema Bulove algebre biti dualan: ako se dokaže neka teorema, time je njoj dualna teorema automatski dokazana**, tj. ne treba je dokazivati.

OSNOVNE TEOREME BULOVE ALGEBRE

Teorema 4.5

$a + a = a \quad ; \quad aa = a \qquad$ *idempotentnost*

Dokaz: $a \overset{B_3}{=} a + 0 \overset{B_4}{=} a + aa' \overset{B_2}{=} (a + a)(a + a') \overset{B_4}{=} (a + a) \cdot 1 \overset{B_3}{=} a + a.$

Teorema 4.6

$a + 1 = 1 \quad ; \quad a \cdot 0 = 0 \qquad$ *ograničenost*

Dokaz: $a+1 \overset{B_3,B_1}{=\!=} 1\cdot(a+1) \overset{B_4}{=} (a+a')(a+1) \overset{B_2}{=} a+a'\cdot 1 \overset{B_3}{=} a+a' \overset{B_4}{=} 1.$

Teorema 4.7

$a+ab=a \quad ; \quad a(a+b)=a \quad$ *apsorpcija.*

Dokaz: $a+ab \overset{B_3}{=} a\cdot 1+ab \overset{B_2}{=} a(1+b) \overset{4.6}{=} a\cdot 1 \overset{B_3}{=} a.$

Teorema 4.8

$a+a'b=a+b \quad ; \quad a(a'+b)=ab.$

Dokaz: $a+a'b \overset{B_2}{=} (a+a')(a+b) \overset{B_4}{=} 1\cdot(a+b) \overset{B_1,B_3}{=\!=} a+b.$

Teorema 4.9

$(a+b)+c=a+(b+c) \quad ; \quad (ab)c=a(bc) \quad$ *asocijativnost.*

Dokaz:

$(a+b)+c \overset{B_3,B_1}{=} 1\cdot\Big((a+b)+c\Big) \overset{B_4}{=} (a+a')\Big((a+b)+c\Big) \overset{B_2}{=} \Big(a(a+b)+ac\Big)+\Big(a'(a+b)+a'c\Big) \overset{4.7,4.8}{=\!=\!=} a+(a'b+a'c) \overset{B_2}{=} a+a'(b+c) \overset{4.8}{=} a+(b+c).$

Teorema 4.10

Sistem jednačina $a+x=1 \wedge a\cdot x=0$ *po nepoznatoj x, ima jedinstveno rešenje za sve vrednosti parametra a iz skupa B.*

Dokaz: Zbog aksioma B_4 sledi da $x=a'$ jeste rešenje datoga sistema. Dokazati kontradikcijom da rešenja više nema. Pretpostaviti da $b\neq a'$ takođe jeste rešenje datog sistema. Tada je:
$b=b\cdot 1=b(a+a')=ba+ba'=0+ba'=aa'+ba'=(a+b)a'=1\cdot a'=a'.$
Kontradikcija sa $b\neq a'$.

Teorema 4.11

$0'=1 \quad ; \quad 1'=0.$

Dokaz: Sistem

$$0+x=1 \;\wedge\; 0\cdot x=0$$

ima za rešenja $x=0'$ zbog B_4 i $x=1$ zbog B_3, a kako taj sistem po teoremi 4.10 ima samo jedno rešenje, sledi da je $0'=1$.

Teorema 4.12

$(a')'=a \quad ;$ *Da li je $f(x)=x'$ bijektivna funkcija? Zašto?*

Dokaz: Sistem

$$a' + x = 1 \ \wedge \ a' \cdot x = 0$$

ima za rešenja $x = a$ i $x = (a')'$ zbog B_1 i B_4, a kako taj sistem po teoremi 4.10 ima samo jedno rešenje, sledi da je $a = (a')'$.

Teorema 4.13
$(a+b)' = a'b'$; $(ab)' = a' + b'$ *Demorganovi zakoni*

Dokaz: Sistem

$$(a+b) + x = 1 \ \wedge \ (a+b) \cdot x = 0$$

ima za rešenje $x = (a+b)'$ zbog B_4 i $x = a'b'$ zbog $(a+b) + a'b' = (a+b+a') \cdot (a+b+b') = 1 \cdot 1 = 1$ i $(a+b) \cdot a'b' = aa'b' + ba'b' = 0+0 = 0$. Međutim, zbog teoreme 4.10 sistem $(a+b)+x = 1 \ \wedge \ (a+b) \cdot x = 0$ ima samo jedno rešenje, pa mora biti $(a+b)' = a'b'$.

Indukcijom se dokazuje uopštenje $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)' = a_1' a_2' \cdots a_n'$.

Definicija 4.14 *Bulova algebra* $\mathcal{C} = (C, +, \cdot, ', 0, 1)$ *jeste podalgebra Bulove algebre* $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *ako i samo ako je* $C \subseteq B$ *i operacije iz* $\mathcal{C}$ *su restrikcije operacija iz* $\mathcal{B}$.

SELEKCIJA

Teorema 4.15 *Neka je* $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *Bulova algebra i* $C \subseteq B$. *Tada je* $\mathcal{C} = (C, +, \cdot, ', 0, 1)$ *podalgebra Bulove algebre* $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *ako i samo ako za svako* a *i* b *iz skupa* C *važi* $a + b \in C$, $ab \in C$ *i* $a' \in C$.[1]

ZATVORENOST

Dokaz: ($\Rightarrow$) (Očevidan) ($\Leftarrow$) Dovoljno je samo dokazati da 0 i 1 iz skupa B pripadaju skupu C. Iz $a \in C$ sledi $a' \in C$, pa je $a + a' \in C$, a kako je i $a + a' = 1$, to konačno sledi da je $1 \in C$. Analogno iz $a \in C$ sledi $a' \in C$, pa je $aa' \in C$, pa je $aa' = 0 \in C$.

Definicija 4.16 *U Bulovoj algebri* $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *definiše se binarna relacija* $\preccurlyeq$:

$$(\forall x \in B)(\forall y \in B) \ \ x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x + y = y$$

[1] Jasno je da su operacije $+$, $\cdot$ i $'$ iz C restrikcije operacija $+$, $\cdot$ i $'$ iz B.

VAŽNA ČINJENICA/UPUTSTVO

Činjenica 4.17

> Svaka od sledećih teorema, Bulovih identiteta, koji zavisi i od promenljive x dokazivaće se tako što će se levoj i desnoj strani dodati x ili x' ili će se i leva i desna strana pomnožiti sa x ili x', a zatim primenjivati aksiome B_1, B_2, B_3, B_4 i već dokazane teoreme! (4.5-4.13)

Teorema 4.18 *U Bulovoj algebri $\mathcal{B}$ sledeći iskazi su ekvivalentni:*

a) $x + y = y$ *b)* $xy = x$ *c)* $x' + y = 1$ *d)* $xy' = 0$.

Dokaz: Ako se jednakost *a*) pomnoži sa x i primeni zakon apsorpcije, dobija se *b*). Dodavanjem elementa x' levoj i desnoj strani jednakosti *b*), primenom aksioma B_2, B_4 i B_3 sledi *c*). Primenom unarne operacije $'$ na *c*) dobija se *d*). Ako se doda y levoj i desnoj strani jednakosti *d*), primenimo aksioma B_2, B_4 i B_3 sledi *a*). Kako je pokazano da *a*) $\Rightarrow$ *b*) $\Rightarrow$ *c*) $\Rightarrow$ *d*) $\Rightarrow$ *a*), to je teorema dokazana.

Ovim su date četiri ekvivalentne definicije relacije $\preccurlyeq$ pa sledi:

$\preccurlyeq$ { U ALGEBRI SKUPOVA : $\subseteq$
— " — ISKAZNOJ : $\Rightarrow$
— " — DELITELJA NEKOG SKUPA : /

Činjenica 4.19

> Tvrdnja dualna za $x \preccurlyeq y$ jeste $y \preccurlyeq x$, jer dualno od $x + y = y$ jeste $xy = y$.

Teorema 4.20 *Relacija $\preccurlyeq$ u Bulovoj algebri $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ jeste relacija poretka, tj. za svako $x, y, z \in B$ važi:*

a) $x \preccurlyeq x$; **b)** $\left(x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq x\right) \Rightarrow x = y$; **c)** $\left(x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq z\right) \Rightarrow x \preccurlyeq z$

Dokaz: **a)** $x \preccurlyeq x \Leftrightarrow x + x = x$;

b) $\left(x \preccurlyeq y \ \wedge \ y \preccurlyeq x\right) \Rightarrow \left(x + y = y \ \wedge \ y + x = x\right) \Rightarrow x = y$;

c) $\left(x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq z\right) \Rightarrow x + y = y \wedge y + z = z \Rightarrow x + y + z = y + z \Rightarrow$

$\Rightarrow x + z = z$ jer je $y + z$ zamenjeno sa z, pa sledi $x \preccurlyeq z$.

Primer 4.21 $(\{1, 5, 6, 30\}, NZS, NZD, \ ' \ , 1, 30)$ *jeste Bulova podalgebra Bulove algebre* $(\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}, NZS, NZD, \ ' \ , 1, 30)$.

Dokaz: Na osnovu zatvorenosti operacija $+, \cdot$ i $'$ u skupu $\{1, 5, 6, 30\}$ i teoreme 4.15 sledi tvrdnja primera.

Haseovi dijagrami (videti 2.24) jesu:

$\forall$ PODALGEBRA IMA 2^n ELEMENATA

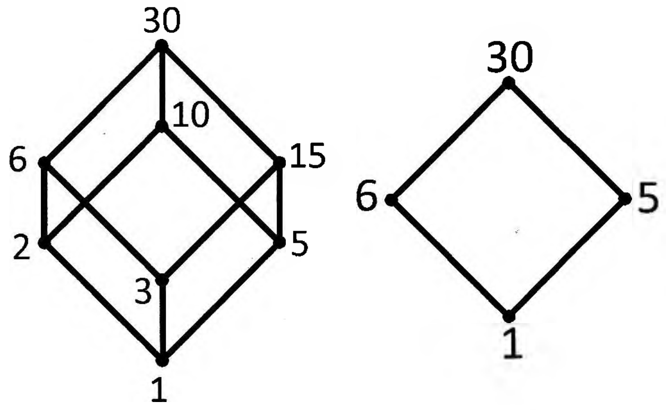


Figure 4.1:

Teorema 4.22 *U Bulovoj algebri $\mathcal{B}$ za svako x i y iz B važi:*
a) $x \preccurlyeq x+y$; **b)** $y \preccurlyeq x+y$; **c)** $xy \preccurlyeq x$; *d)* $xy \preccurlyeq y$.

Dokaz: **a)** $x \preccurlyeq x+y \Leftrightarrow x+y = x+y$; **c)** $xy \preccurlyeq x \Leftrightarrow xy + x = x$.

Drugim rečima, zbir je veći od sabirka, a proizvod je manji od činioca (faktora). Interpretirati teoremu na Haseovom dijagramu!

Teorema 4.23 *U Bulovoj algebri $\mathcal{B}$ za svako x, y i z iz B važi:*

a) $\Big(x \preccurlyeq z \ \wedge \ y \preccurlyeq z\Big) \Rightarrow x+y \preccurlyeq z$. *Važi i obratno. Teorema* 4.24

b) $\Big(z \preccurlyeq x \ \wedge \ z \preccurlyeq y\Big) \Rightarrow z \preccurlyeq xy$. *Važi i obratno. Teorema* 4.24

c) $\Big(x \preccurlyeq z \ \wedge \ y \preccurlyeq z\Big) \Rightarrow xy \preccurlyeq z$. *Ne važi obratno. Naći kontraprimer.*

d) $\Big(z \preccurlyeq x \ \wedge \ z \preccurlyeq y\Big) \Rightarrow z \preccurlyeq x+y$. *Ne važi obratno. Naći kontraprimer.*

Dokaz:

a) $\Big(x \preccurlyeq z \wedge y \preccurlyeq z\Big) \Rightarrow \Big(x+z = z \wedge y+z = z\Big) \Rightarrow$
$\Rightarrow x+y+z = z \Rightarrow x+y \preccurlyeq z$;

b) $\Big(z \preccurlyeq x \wedge z \preccurlyeq y\Big) \Rightarrow \Big(zx = z \wedge zy = z\Big) \Rightarrow zxy = z \Rightarrow z \preccurlyeq xy$;

c) $\Big(x \preccurlyeq z \ \wedge \ y \preccurlyeq z\Big) \Rightarrow x+z = z \wedge y+z = z$. Na osnovu ovoga sledi:
$z + xy = (z+x)(z+y) = zz = z$, tj. $xy + z = z$, što znači $xy \preccurlyeq z$.
Kontraprimer je $x = A = \{1,2\}$, $y = B = \{2,3\}$, $z = C = \{2\}$ jer je

$$A \cap B \subseteq C \text{ dok } A \nsubseteq C \text{ i } B \nsubseteq C.$$

d) $\Big(z \preccurlyeq x \ \wedge \ z \preccurlyeq y\Big) \Rightarrow zx = z \wedge zy = z$. Na osnovu ovoga sledi:
$z(x+y) = zx + zy = z + z = z$, tj. $z(x+y) = z$ što znači $z \preccurlyeq x + y$.
Kontraprimer je $x = A = \{1,2\}$, $y = B = \{2,3\}$, $z = C = \{1,2,3\}$,
jer je $C \subseteq A \cup B$ dok $C \not\subseteq A$ i $C \not\subseteq B$.

Tvrdnje b) i d) su dualne redom tvrdnjama a) i c)! 4.19

Na osnovu teorema 4.22 i 4.23 sledi da je $x+y$ najmanje gornje ograničenje (supremum), tj. najmanji element u skupu gornjih ograničenja za skup $\{x, y\}$, a xy najveće donje ograničenje (infinum) za skup $\{x, y\}$. **Interpretirati teoremu na Haseovom dijagramu!**

~~Najmanje gornje ograničenje (supremum), ukoliko postoji, jedinstveno je određen element, kao najmanji element u skupu svih gornjih granica nekog podskupa skupa B (teorema 2.28). Na primer, u skupu racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ ne postoji najmanje gornje ograničenje za skup $\{x|x^2 < 2 \wedge x \in \mathbb{Q}\}$, dok u skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ za isti taj skup $\{x|x^2 < 2 \wedge x \in \mathbb{Q}\}$ postoji najmanje gornje ograničenje (supremum), i to je broj $\sqrt{2}$. Da li se ovo poslednje može dokazati?~~

Teorema 4.24 *U Bulovoj algebri $\mathcal{B}$ za svako x, y i z iz B važi:*
a) $x + y \preccurlyeq z \Rightarrow \Big(x \preccurlyeq z \ \wedge \ y \preccurlyeq z\Big)$; **b)** $u \preccurlyeq xy \Rightarrow \Big(u \preccurlyeq x \ \wedge \ u \preccurlyeq y\Big)$.

Dokaz: **a)** Kako je $x \preccurlyeq x + y$, teorema 4.22 i kako je po uslovu teoreme $x + y \preccurlyeq z$, to zbog tranzitivnosti sledi $x \preccurlyeq z$. Analogno je i $y \preccurlyeq z$.

Tvrdnja pod b) je dualna tvrdnji pod a). Dokažite sami. 4.19

Teorema 4.25 *U Bulovoj algebri $\mathcal{B}$ za svako x, y i z iz B važi:*
a) $x \preccurlyeq y \Rightarrow x + z \preccurlyeq y + z$; **b)** $x \preccurlyeq y \Rightarrow xz \preccurlyeq yz$.

Dokaz:

a) $$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x + y = y \overset{+z}{\Rightarrow} x + y + z = y + z \overset{z+z=z}{\Longrightarrow}$$
$$\Rightarrow (x+z) + (y+z) = y + z \Leftrightarrow x + z \preccurlyeq y + z.$$
b) $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow xy = x \overset{\cdot z}{\Rightarrow} xyz = xz \Rightarrow (xz)(yz) = xz \Rightarrow xz \preccurlyeq yz$;

Teorema 4.26 *U Bulovoj algebri $\mathcal{B}$ za svako x iz B važi:*
a) $0 \preccurlyeq x$; *b)* $x \preccurlyeq 1$

Dokaz: a) $0 \preccurlyeq x \Leftrightarrow 0 + x = x$ (B_1, B_3); b) $x \preccurlyeq 1 \Leftrightarrow x \cdot 1 = x$ (B_3).

Najmanji element je 0, a 1 najveći element skupa B u odnosu na relaciju poretka (parcijalnog uređenja) $\preccurlyeq$.

Teorema 4.27 *U Bulovoj algebri $\mathcal{B}$ za svako x i y iz B važi:*

$$xy = 1 \ \Leftrightarrow \ x = 1 \ \wedge \ y = 1.$$

Dokaz: $xy = 1 \ \Rightarrow \ x + xy = x + 1 \ \Rightarrow \ x = 1.$

Teorema 4.28 *U Bulovoj algebri $\mathcal{B}$ za svako x i y iz B važi:*

$$x = y \ \Leftrightarrow \ (x' + y)(x + y') = 1; \qquad x = y \Leftrightarrow x'y + xy' = 0$$

Dokaz: $(\Rightarrow)$ Očevidno.

$(\Leftarrow)$ Iz $(x'+y)(x+y') = 1$, na osnovu teoreme 4.27 sledi $x'+y = 1$ i $x+y' = 1$, a odavde, na osnovu teoreme 4.18 $x \preccurlyeq y$ i $y \preccurlyeq x$ tj. $x = y$. Drugi deo teoreme je dualan prvom delu.

Test 4.29 *Zaokružiti slova ispred iskaza koji su tačni u Bulovoj algebri $\mathcal{B} = (\{0,1\}, +, \cdot, ', 0, 1)$:* **a)** $x + y = (x'y')'$ **b)** $xy = (x' + y')'$ **c)** $xy = 1 \Rightarrow x = 1$ **d)** $x = y \Rightarrow x' = y'$ **e)** $x' = y' \Rightarrow x = y$ **f)** $f(x) = x' \Rightarrow f : B \underset{na}{\overset{1-1}{\longrightarrow}} B$ **g)** $xy = 0 \ \Rightarrow \ (x = 0 \ \vee \ y = 0)$ **h)** $(\forall x \in B)(\exists y \in B) \ x + y = 1 \ \wedge \ xy = 0$ **i)** $xx = x + x$ **k)** $x \preccurlyeq x'$.

Definicija 4.30 *Element $p \neq 0$ Bulove algebre $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ jeste* atom *ako ne postoji element $x \in B$ različit od 0 i različit od p takav da je $0 \preccurlyeq x \preccurlyeq p$, to jest minimalni element u skupu $B \setminus \{0\}$.*

Teorema 4.31 *Neki element $p \in B$ različit od nule atom je Bulove algebre $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ akko iz $0 \preccurlyeq x \preccurlyeq p$ sledi $x = 0 \ \vee \ x = p$.*

Teorema 4.32 *Element $p \in B$ različt od nule atom je Bulove algebre $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$ ako i samo ako za svako x iz B važi:*

$$p \preccurlyeq x \ \Rightarrow \ px = p \quad i \quad p \not\preccurlyeq x \ \Rightarrow \ px = 0.$$

Drugim rečima, $p \neq 0$ je atom ako i samo ako je za svako x iz B px jednako ili 0 ili p, tj.

$$px = \begin{cases} p & \text{za } p \preccurlyeq x \\ 0 & \text{za } p \not\preccurlyeq x \end{cases}$$

Teorema 4.33 *Ako je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ Bulova algebra, tada minimalni elementi (2.19) skupa $B \setminus \{0\}$ u odnosu na relaciju poretka $\preccurlyeq$ definisanu sa $x + y = y$ (ili $xy = x$ ili $xy' = 0$ ili $x' + y = 1$) jesu atomi Bulove algebre $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$.*

Teorema 4.34 *U svakoj konačnoj Bulovoj algebri $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ za svaki element $x \in B \setminus \{0\}$ postoji takav atom p da je $p \preccurlyeq x$.*

$f(0+1) = 0^* \oplus 1^*$, $f(01) = 0^* \odot 1^*$, $f(0') = \overline{0^*}$
$f(0+0) = \ldots$

Definicija 4.35 *Funkcija $f : B \to C$ jeste homomorfizam Bulovih algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$ i $(C, \bigoplus, \bigodot, \overline{}, 0^*, 1^*)$ ako je $f(0) = 0^*, f(1) = 1^*,$*

$$f(x+y) = f(x) \bigoplus f(y),\ f(xy) = f(x) \bigodot f(y),\ f(x') = \overline{f(x)}.$$

Definicija 4.36 *Bijektivni homomorfizam naziva se izomorfizam, a izomorfizam Bulove algebre u samu sebe automorfizam.*

Primer 4.37 *Bulova algebra*
$(\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}, NZS, NZD, \ ', 1, 30)$ *izomorfna je sa*
$\Big(\big\{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{2,3\}, \{2,5\}, \{3,5\}, \{2,3,5\}\big\}, \cup, \cap, \ ^c, \emptyset, \{2,3,5\}\Big),$
gde je izomorfizam, na primer, funkcija

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 10 & 15 & 30 \\ \emptyset & \{2\} & \{3\} & \{5\} & \{2,3\} & \{2,5\} & \{3,5\} & \{2,3,5\} \end{pmatrix},$$

gde su $'$ i ^{c} definisane sa $n' = \frac{30}{n}$ i $A^c = \overline{A} = \{2,3,5\} \setminus A$.

Teorema 4.38 *Neka je $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$ konačna Bulova algebra i S skup svih atoma te Bulove algebre. Neka je za svako $x \in B \setminus \{0\}$ definisan skup*

$$\pi(x) = \{p | p \in S \ \wedge \ p \preccurlyeq x\} = \{p_1, p_2, ..., p_n\}. \quad Tada \quad x = p_1 + p_2 + ... + p_n$$

jeste jedinstveno predstavljanje elementa x (do na komutativnost i asocijativnost).

Posledica 4.39 *U svakoj konačnoj Bulovoj algebri jedinica je jednaka zbiru svih njenih atoma.*

Sledi teorema Stona o reprezentaciji Bulovih algebri (lakši deo za konačni slučaj). [2]

Teorema 4.40 *Neka je S skup atoma konačne Bulove algebre $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$ i $\mathcal{P}(S)$ skup svih podskupova skupa S, tj. partitivni skup od skupa svih atoma S. Tada funkcija*

$$\pi : B \to \mathcal{P}(S) \quad definisana \quad sa \quad \pi(x) = \{p | p \in S \ \wedge \ p \preccurlyeq x\},$$

jeste izomorfizam Bulovih algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$ i $(\mathcal{P}(S), \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, S)$, gde je unarna operacija komplement skupa $\overline{}$ definisana sa $\overline{A} = S \setminus A = \{x | x \in S \wedge x \notin A\}$.

Dokaz: Injektivnost funkcije $\pi : B \to \mathcal{P}(S)$ sledi iz

$$\pi(x) = \pi(y) \Rightarrow x \overset{4.38}{=} \sum_{t \in \pi(x)} t = \sum_{t \in \pi(y)} t \overset{4.38}{=} y.$$

Sirjektivnost funkcije $\pi : B \to \mathcal{P}(S)$ sledi iz

$$\Big(\forall X \in \mathcal{P}(S)\Big)\Big(\exists x \in B\Big) \ \Big(x = \sum_{t \in X} t \overset{4.38}{\Rightarrow} x = \sum_{t \in \pi(x)} t\Big) \overset{4.38}{\Rightarrow} \pi(x) = X.$$

[2]Stone M. H, *The theory of representations for Boolean algebras.* Amer. Math. Soc. 40, 37-111, 1936.

Da bi se pokazala homomorfnost funkcije $\pi : B \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ treba dokazati:
$\pi(x+y) = \pi(x) \cup \pi(y)$ $\qquad \pi(xy) = \pi(x) \cap \pi(y)$ $\qquad \pi(x') = \overline{\pi(x)}$.

$p \in \pi(x+y) \Rightarrow p \preccurlyeq x+y \Rightarrow p(x+y) = p \Rightarrow px+py = p$, a kako su na osnovu 4.32 elementi px i py iz $\{p, 0\}$, to je bar jedan od px i py jednak p, jer u protivnom, ako su oba 0, bilo bi da je $0 = p$, što ne može biti jer je p atom. Neka je, na primer, $px = p$, što znači $p \preccurlyeq x$ odnosno $p \in \pi(x)$ tj. $p \in \Big(\pi(x) \cup \pi(y)\Big)$. Analogno se dešava i za $py = p$.

Iz $p \in \Big(\pi(x) \cup \pi(y)\Big)$ sledi da p pripada bar jednom od skupova $\pi(x)$ ili $\pi(y)$ i neka je, na primer, $p \in \pi(x)$ što dalje implicira $p \preccurlyeq x \preccurlyeq (x+y) \Rightarrow p \preccurlyeq (x+y) \Rightarrow p \in \pi(x+y)$.

Iz prethodna dva pasusa sledi $\pi(x+y) = \pi(x) \cup \pi(y)$.

$p \in \pi(xy) \Rightarrow p \preccurlyeq xy \preccurlyeq x$ tj. $p \preccurlyeq x$ odnosno $p \in \pi(x)$. Analogno se dobija da je i $p \in \pi(y)$, tj. $p \in \Big(\pi(x) \cap \pi(y)\Big)$.

Iz $p \in \Big(\pi(x) \cap \pi(y)\Big) \Rightarrow p \in \pi(x) \wedge p \in \pi(y) \Rightarrow p \preccurlyeq x \wedge p \preccurlyeq y \Rightarrow p \preccurlyeq xy \Rightarrow p \in \pi(xy)$.

Iz prethodna dva pasusa sledi $\pi(xy) = \pi(x) \cap \pi(y)$.

Dalje sledi $p \in \pi(x') \overset{4.38}{\Leftrightarrow} p \preccurlyeq x' \overset{4.16,4.18}{\Longleftrightarrow} px' = p \overset{4.32}{\Leftrightarrow} px' \neq 0 \overset{4.16,4.18}{\Longleftrightarrow} p \not\preccurlyeq x \overset{4.38}{\Leftrightarrow}$ $\overset{4.38}{\Leftrightarrow} p \notin \pi(x) \Leftrightarrow p \in \overline{\pi(x)}$ odnosno $\pi(x') = \overline{\pi(x)}$.

Posledica 4.41 *Svaka konačna Bulova algebra ima 2^n elemenata, gde je n broj njenih atoma i svake dve konačne Bulove algebre s jednakim brojem elemenata su izomorfne.*

Bulove funkcije

Jedan od vrlo važnih pojmova Bulovih algebri, naročito u primeni, jeste pojam Bulovih funkcija.

Definicija 4.42 *Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ Bulova algebra. Funkcija od n nezavisnih promenljivih $f : B^n \longrightarrow B$, tj. funkcija koja uređene n-torke čije komponente su iz B preslikava u elemente skupa B jeste Bulova funkcija akko za svaku n-torku $(x_1, x_2, ..., x_n) \in B^n$ važi:*

1) *Konstantne funkcije odnosno funkcije oblika $f(x_1, x_2, ..., x_n) = a$, gde je a fiksni element iz B jesu Bulove funkcije.*

2) *Projekcije, to jest funkcije oblika $f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_i$ za proizvoljno $i \in \{1, 2, ..., n\}$ jesu Bulove funkcije.*

3) *Ako su f i g Bulove funkcije, tada su to i funkcije $f'(x_1, ..., x_n) = \Big(f(x_1, ..., x_n)\Big)'$, $(f+g)(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n) + g(x_1, ..., x_n)$ i $(f \cdot g)(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n) \cdot g(x_1, ..., x_n)$.*

4) *Bulove funkcije se mogu dobiti samo primenom* **1)**, **2)** *i* **3)**, *i to konačno mnogo puta.*

Drugim rečima, skup Bulovih funkcija sadrži konstantne funkcije, projekcije, funkcije (operacije) $+$, $\cdot$ i $'$ i zatvoren je u odnosu na kompoziciju (superpoziciju) funkcija.

Kompoziciono zatvoreni skupovi funkcija koji sadrže sve projekcije (kao i Bulove funkcuje) nazivaju se **klonovi** funkcija. Ime klon potiče od grčke reči $\kappa\lambda o\nu o\sigma$ što znači izdanak, jer sve funkcije jednoga klona izrastaju pomoću superpozicija (kompozicija) iz nekih funkcija za koje se onda kaže da ga generišu. Klon Bulovih funkcija generisan je sa svim konstantama i funkcijama (operacijama) $+$, $\cdot$ i $'$. Danas o klonovima postoje mnogobrojni i značajni naučni radovi u raznim oblastima.

Teorema 4.43 *Ako je skup B dvočlan, tj. $B = \{0, 1\}$, tada svaka funkcija $f : B^n \longrightarrow B$ jeste Bulova.*

Dokaz je posledica teoreme 4.52.

Ovde će se proučavati samo funkcije dvoelementnih Bulovih algebri koje su sve Bulove.

Svaka Bulova funkcija može se definisati tablično ili Bulovim izrazom. Na primer, funkcija f zadata Bulovim izrazom $f(x,y,z,u) = yu + x'u + y'z'u'$ i ista ta funkcija tablično

x	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
y	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
z	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
u	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
f(x,y,z,u)	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1

Definicija 4.44 *Konstanta skupa B je proizvoljni element skupa B. Promenljiva skupa B je simbol koji se može zameniti bilo kojim elementom skupa B.*

Definicija 4.45 **1)** *Konstante i promenljive su Bulovi izrazi.*

2) *Ako su A i B Bulovi izrazi, tada su i $(A+B)$, $(A \cdot B)$ i A' Bulovi izrazi.*

3) *Bulovi izrazi mogu se dobiti samo primenom* **1)** *i* **2)**, *i to konačno mnogo puta.*

Da li ova definicija ima neke veze s definicijom 4.42? Da li je to na neki način isto?

Očevidno, svaki Bulov izraz jednoznačno određuje jednu Bulovu funkciju!

Primeri promenljivih: $x, y, z, u, x_1, y_1, z_1, u_1, \ldots$

Primeri Bulovih izraza: $x, (x+y), ((xy') + y(x'+y)), (1 + (xy')), \cdots$

Uvodi se dogovor o brisanju leve i desne krajnje zagrade, kao i konvencija da operacija $\cdot$ ima prednost u odnosu na operaciju $+$ i, shodno tome, brišu se odgovarajuće zagrade, pa od prethodnih Bulovih izraza sledi da su i $x + y, xy' + y(x'+y), 1 + xy', \ldots$ takođe Bulovi izrazi.

Svaki Bulov izraz jednoznačno određuje Bulovu funkciju, dok za svaku Bulovu funkciju postoji više Bulovih izraza koji definišu istu funkciju. Na primer, Bulovi izrazi $x' + y'$ i $(xy)'$ određuju istu Bulovu funkciju $f(x,y) = x' + y' = (xy)'$ čija je tablična reprezentacija

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
f(x,y)	1	1	1	0

Sledi definisanje nekih posebnih Bulovih izraza koji su od velikog značaja u daljem radu.

Definicija 4.46 *Monom je promenljiva ili njegova negacija.*

Primeri monoma: $x, y, z, u, x_1, y_1, z_1, u_1, x', y', z', u', x_1', y_1', z_1', u_1', ...$

Definicija 4.47 *Elementarna konjunkcija je konjunkcija (proizvod) monoma. Element* 1 *Bulove algebre jeste elementarna konjunkcija.*

Primeri elementarnih konjunkcija: $x, xy', x'yzu, 1, x_1'yz_2', ...$

Definicija 4.48 *Disjunktivna normalna forma u oznaci DNF je disjunkcija (zbir) elementarnih konjunkcija.*

Primeri DNF: $x + u'z + x'yzu'$, xy', $x + y$, $x_1y'x + y_1z'$, 1, ...

Definicija 4.49 *Savršena disjunktivna normalna forma skupa promenljivih $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, u oznaci $SDNF$, jeste disjunkcija (zbir) elementarnih konjunkcija, takvih da se u svakoj elementarnoj konjunkciji pojavljuje svaka od promenljivih skupa A.*

Primeri $SDNF$ za skup promenljivih $A = \{x, y, z\}$:
$xy'z + x'yz + xyz$, $xy'z$, $xyz' + x'y'z' + xy'z'$, ...
Analogno, dualno se definišu elementarna disjunkcija, konjunktivna normalna forma KNF i savršena konjunktivna normalna forma $SKNF$.

Pokazaćemo da se svaka Bulova funkcija može predstaviti pomoću $SDNF$. U tu svrhu uvodimo sledeću definiciju (oznaku).

Definicija 4.50 $x^\alpha = \begin{cases} x & za \quad \alpha = 1 \\ x' & za \quad \alpha = 0 \end{cases}$ *tj.* $x^1 = x$ *i* $x^0 = x'$.

Teorema 4.51 $x^\alpha = \begin{cases} 0 & za \quad x \neq \alpha \\ 1 & za \quad x = \alpha \end{cases}$

Dokaz: $0^0 = 0' = 1$, $0^1 = 0$, $1^0 = 1' = 0$, $1^1 = 1$.

Sada se može formulisati i dokazati teorema o reprezentaciji proizvoljne Bulove funkcije pomoću $SDNF$.

Teorema 4.52 *Rreprezentacija Bulovih funkcija pomoću $SDNF$.*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{0,1\}^n} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

Dokazaćemo teoremu za $n = 3$. Na primeru tri nezavisno promenljive, odnosno za $n = 3$ prethodna teorema ima oblik: $f(x, y, z) =$
$f(0,0,0)x^0y^0z^0 + f(0,0,1)x^0y^0z^1 + f(0,1,0)x^0y^1z^0 + f(0,1,1)x^0y^1z^1 +$
$+f(1,0,0)x^1y^0z^0 + f(1,0,1)x^1y^0z^1 + f(1,1,0)x^1y^1z^0 + f(1,1,1)x^1y^1z^1$

Proveri sada da li je ova jednakost tačna na primer za $(x, y, z) = (0, 1, 1)$. Ako se uvrsti $(x, y, z) = (0, 1, 1)$, tada će na desnoj strani svi sabirci (elementarne konjunkcije), izuzev četvrtog, biti nule jer u svim tim sabircima će se na bar jednom mestu razlikovati osnova od eksponenta pa će zbog 4.51 sabirci biti jednaki 0, a četvrti će biti $f(0, 1, 1)$. Time je naša jednakost postala $f(0, 1, 1) = f(0, 1, 1)$ odnosno tačna. Kako će se ovo očevidno uvek desiti za svaku trojku $(x, y, z) \in \{0, 1\}^3$ time je teorema dokazana.

Dokaz je sproveden za $n = 3$, međutim to očevidno važi i za svako $n \in \mathbb{N}$.

Neka je Bulova funkcija f zadata sledećom tablicom:

0	0	0	0	1	1	1	1	x
0	0	1	1	0	0	1	1	y
0	1	0	1	0	1	0	1	z
1	0	1	0	0	0	1	1	$f(x, y, z) = x'y'z' + x'yz' + xyz' + xyz$

Na osnovu teoreme 4.52 odnosno njenog specijalnog slučaja za $n = 3$ $f(x, y, z) =$
$f(0,0,0)x'y'z' + f(0,0,1)x'y'z + f(0,1,0)x'yz' + f(0,1,1)x'yz +$
$+f(1,0,0)xy'z' + f(1,0,1)xy'z + f(1,1,0)xyz' + f(1,1,1)xyz$
pa sledi da je njena $SDNF$

$$f(x, y, z) = x'y'z' + x'yz' + xyz' + xyz.$$

Bulove funkcije biće posmatrane na dvoelementnom skupu $B = \{0, 1\}$. Bulovih funkcija od jedne nezavisno promenljive (unarnih operacija skupa B) $f : B \to B$ ima samo četiri, i to su:

$$f_1 = \binom{01}{00} \qquad f_2 = \binom{01}{01} \qquad f_3 = \neg = \binom{01}{10} \qquad f_4 = \binom{01}{11}$$

Ove funkcije redom se nazivaju univerzalna negacija, identička funkcija, negacija i univerzalna afirmacija.

U sledećoj tabeli za oznake funkcija (operacija) koristiće se simboli iz iskazne algebre odnosno uzima se da
$x + y$ je $x \vee y$ i naziva se **disjunkcija**, xy je $x \wedge y$ odnosno **konjunkcija**, $x' + y$ je $x \Rightarrow y$ ili **implikacija**, $x'y' + xy$ je $x \Leftrightarrow y$ i naziva se **ekvivalencija**, $x'y + xy'$ je $x \oplus y$ i zove se **sabiranje po modulu 2**, još i **ekskluzivno ili**, $x' + y'$ je $x \overline{\wedge} y$ (obeležava se i sa $\uparrow$) i naziva se **ni**, ali i Šeferova funkcija, $x'y'$ je $x \overline{\vee} y$ (obeležava se i sa $\downarrow$) i naziva se **nili** ili Lukašijevićeva funkcija. I preostalim funkcijama dodeljena su neki nazivi, ali neće biti navođeni.

Iskazna algebra je samo jedan primer Bulove algebre zbog kojega se u mnogim knjigama operacije $+$, $\cdot$ i $'$ označavaju redom sa $\vee$, $\wedge$ i $\neg$, dok se u modelu algebre skupova koriste redom simboli $\cup$, $\cap$ i ^{c}.

Bulovih funkcija od dve nezavisno promenljive (binarnih operacija skupa B) ima 16. Evo sedam najčešće korišćenih:

x	y	$\wedge$	$\vee$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\oplus$	$\overline{\wedge}$	$\overline{\vee}$	...
0	0	0	0	1	1	0	1	1	...
0	1	0	1	1	0	1	1	0	...
1	0	0	1	0	0	1	1	0	...
1	1	1	1	1	1	0	0	0	...

Kako je dokazana teorema 4.52, znači da se svaka Bulova funkcija može predstaviti (kao njihova kompozicija, tj. superpozicija) pomoću funkcija $+$, $\cdot$ i $'$. Zato se za skup funkcija $\{+, \cdot, '\}$ kaže da je generatorni za skup svih Bulovih funkcija. Postavlja se pitanje da li je i izbacivanjem neke funkcija iz skupa funkcija $\{+, \cdot, '\}$ novonastali dvočlani skup funkcija i dalje generatorni? Zbog identiteta (teoreme) $x + y = (x'y')'$ sledi da se funkcija (operacija) $+$ može izraziti pomoću operacija (funkcija) skupa $\{\cdot, '\}$, što znači da je odgovor na prethodno pitanje DA.

Prema tome, skup funkcija $\{\cdot, '\}$ takođe je generatorni i može se pokazati da izbacivanjem bilo koje funkcije iz skupa $\{\cdot, '\}$ novodobijeni skup funkcija nije više generatorni, pa se za takve generatorne skupove funkcija kaže da su **baze** skupa Bulovih funkcija. Znači, $\{\cdot, '\}$ jeste jedna dvočlana baza. Očevidno je da i $\{+ , '\}$ jeste baza skupa svih Bulovih funkcija. Postavlja se sada pitanje da li postoje jednočlane baze? Odgovor je potvrdan, što pokazuje sledeća teorema.

Teorema 4.53 *Jednočlani skupovi funkcija* $\{\overline{\wedge}\}$ *(Šeferova) i* $\{\overline{\vee}\}$ *(Lukašijevićeva) funkcija, jesu baze skupa Bulovih funkcija.*

Dokaz: Iz definicija **ni** funkcije $\overline{\wedge}$ (Šeferove funkcije $\uparrow$), funkcije **negacije** $\neg$ i disjunkcije $\vee$ sledi

x	y	$\neg x$	$\neg y$	$x\overline{\wedge}x$	$y\overline{\wedge}y$	$x \vee y$	$(x\overline{\wedge}x)\overline{\wedge}(y\overline{\wedge}y)$
0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1	1

Na osnovu jednakosti poslednjih dveju kolona vidi se da se funkcija (operacija) $\vee$ može izraziti samo pomoću operacije $\overline{\wedge}$, tj. $x \vee y = (x\overline{\wedge}x)\overline{\wedge}(y\overline{\wedge}y)$, odnosno $x + y = (x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y)$. Na osnovu jednakosti kolona ispod $\urcorner x$ i $x \overline{\wedge} x$ sledi da se i $\urcorner$ može izraziti samo operacijom $\overline{\wedge}$. I sada je očevidno sledeće: kako je $\{\urcorner, \vee\} = \{', +\}$ baza, to je i $\{\overline{\wedge}\} = \{\uparrow\}$ jednočlana baza skupa svih Bulovih funkcija dvoelementne Bulove algebre. Analogno se dokazuje i za $\{\overline{\vee}\}$ Lukašijevićevu funkciju.

~~IMPLIKANTA~~

Definicija 4.54 *Bulova funkcija $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ implicira Bulovu funkciju $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ako i samo ako je*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

za sve vrednosti nezavisno promenljivih iz $x_1, x_2, \ldots, x_n$ skupa B. To ćemo kraće zapisivati sa $f + g = g$ ili $f \preccurlyeq g$.

Zbog zakona ograničenosti $1 + x = 1$, sledi da f implicira g akko za sve vrednosti promenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$ za koje f ima vrednost 1 sledi da i g ima vrednost 1.

Definicija 4.55 *Bulov izraz $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ implicira Bulov izraz $B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ako i samo ako funkcija $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, koju određuje Bulov izraz A, implicira funkciju $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ koju određuje Bulov izraz B. Tada se kaže da je A implikanta za B.*

Ako elementarna konjunkcija C implicira disjunktivnu normalnu formu D tj. $C + D = D \Leftrightarrow C \preccurlyeq D$, kaže se da je C impliknta za D.

Kako je DNF disjunkcija elementarnih konjunkcija, sledi da zbog idempotentnosti svaka elementarna konjunkcija implicira tu DNF. Na primer, elementarna konjunkcija $C = x'yz$ implicira disjunktivnu normalnu formu $D = xyz' + x'y'z + x'yz + x'y'z'$, tj. $C = x'yz$ je implikanta za $D = xyz' + x'y'z + x'yz + x'y'z'$. Sada se daje definicija kada implikanta $C = x'yz$ jeste prosta implikanta za $D = xyz' + x'y'z + x'yz + x'y'z'$, odnosno za Bulovu funkciju koju D određuje.

Definicija 4.56 *Elementarna konjunkcija C_1 uključena je u elementarnu konjunkciju C akko je skup monoma od C_1 podskup skupa monoma od C.*

Definicija 4.57 *Elementarna konjunkcija C je prosta implikanta Bulove funkcije f akko C implicira f i ako ne postoji elementarna konjunkcija uključena u C koja je različita od C i implicira f.*

Prosta implikanta Bulove funkcije f je elementarna konjunkcija s minimalnim skupom monoma koja implicira Bulovu funkciju f.

Često će se poistovećivati Bulov izraz sa funkcijom koju određuje, ali ipak treba imati na umu da to nije isto: beskonačno mnogo različitih Bulovih izraza može da određuje istu Bulovu funkciju.

Kako se svaka Bulova funkcija može predstaviti sa DNF, sledi da definicija proste implikante za Bulovu funkciju jeste isto što i prosta implikanta za DNF koja predstavlja (određuje) tu funkciju.

Da bi se definisale minimalne disjunktivne normalne forme, u oznaci MDNF, mora se prvo dati definicija kada se za $DNF \quad \Phi_1$ kaže da je prostija od $DNF \quad \Phi_2$.

Definicija 4.58 *$DNF \quad \Phi_1$ je prostija od $DNF \quad \Phi_2$ akko je broj monoma od Φ_1 manji ili jednak broju monoma od Φ_2 i ako je broj elementarnih konjunkcija od Φ_1 manji ili jednak broju elementarnih konjunkcija od Φ_2, gde je bar jedna od pomenutih nejednakosti striktna odnosno $<$.*

Definicija 4.59 *DNF Bulove funkcije f je minimalna akko ne postoji prostija od nje koja određuje istu Bulovu funkciju.*

Teorema 4.60 *Svaka elementarna konjunkcija minimalne disjunktivne normalne forme (u daljem tekstu $MDNF$) jeste prosta implikanta te MDNF, odnosno Bulove funkcije koju određuje ta $MDNF$.*

Dokaz: Neka je $\Phi \quad MDNF$ Bulove funkcije f i neka je $\Phi = C + D$, gde je C proizvoljna elementarna konjunkcija od Φ, a D disjunkcija (zbir) svih preostalih elementarnih konjunkcija. Sve jednakosti Bulovih izraza koje će slediti, sugerišu jednakost funkcija koje one određuju, pa je jasno da je u tom smislu i $\Phi = f$. Jasno je da je C implikanta za Φ tj. za f. Dokazaće se da je C prosta implikanta za f. Dokaz se izvodi kontradikcijom. Pretpostavlja se da C nije prosta implikanta, tj. da postoji elementarna konjunkcija C_1 takva da je skup monoma od C_1 podskup skupa monoma od C, $C_1 \neq C$ i C_1 implicira f. Faktički se pretpostavlja da je

$$C = C_1 C^*, \qquad C_1 \neq C \qquad C_1 + f = f.$$

Prvo treba primetiti da je $C_1 + C = C_1 + C_1 C^* = C_1$ (apsorpcija). Kako je $C_1 = C_1 + C$, dalje sledi

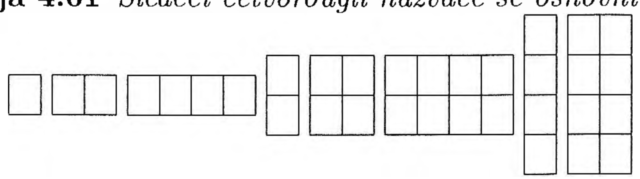
$$C_1 + D = C_1 + C + D = C_1 + \Phi = C_1 + f = f.$$

Kako smo dobili da je $C_1 + D = f$, to znači da je $C_1 + D$ disjunktivna normalna forma funkcije f koja je prostija od $C + D$ (skup monoma od C_1 je podskup skupa monoma od C i $C_1 \neq C$), što je kontradiktorno činjenici da je $C + D$ minimalna disjunktivna normalna forma.

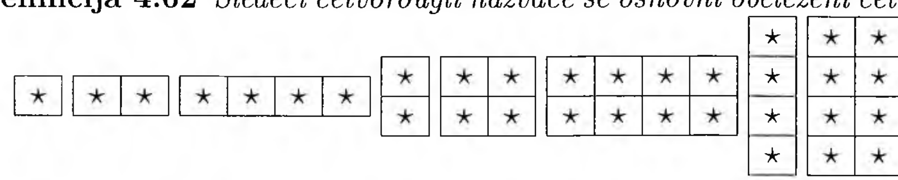
Ova teorema je veoma značajna jer ukazuje na postupak stizanja do $MDNF$ za neku Bulovu funkciju f, tj. treba pronaći sve proste implikante Bulove funkcije f i od njih odabrati što je moguće manji broj tako da njihova disjunkcija bude DNF koja određuje baš tu Bulovu funkciju f.

Pokazaće se postupak za pronalaženje prostih implikanti neke Bulove funkcije pomoću Karnoovih tablica, samo za funkcije s dve, tri i četiri nezavisno promenljive. U tu svrhu evo nekoliko definicija.

Definicija 4.61 *Sledeći četvorougli nazvaće se osnovni četvorougli:*



Definicija 4.62 *Sledeći četvorougli nazvaće se osnovni obeleženi četvorougli:*



Za svaku Bulovu funkciju $f(x, y, z, u)$ popunjava se tablica

	x	x	x'	x'	
z					u
z					u'
z'					u'
z'					u
	y	y'	y'	y	

tako što se za svaku elementarnu konjunkciju $SDNF$-me te Bulove funkcije f, obeleži njoj odgovarajući kvadratić u tabeli sa simbolom $\star$. Na primer, za funkciju

x	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
y	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
z	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
u	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
f(x,y,z,u)	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1

$SDNF$ je $f(x,y,z,u) = xyzu + xyz'u + xy'z'u' + x'yzu + x'yz'u + x'y'zu + x'y'z'u + x'y'z'u'$ i posle obeležavanja odgovarajućih polja dobija se tabela:

	x	x	x'	x'	
z	$\star$		$\star$	$\star$	u
z					u'
z'		$\star$	$\star$		u'
z'	$\star$		$\star$	$\star$	u
	y	y'	y'	y	

Može se zamisliti da je ova tabela od $4 \times 4 = 16$ kvadratića nacrtana na papiru koji se može istezati i savijati. Prvo se taj papir istegli levo i desno pa savije u omotač cilindra, zatim se cilindar istegli u pravcu njegove ose simetrije, savije i sastavi u oblik torusa (automobilske gume). Sada se iz spoljašnjosti toga torusa posmatraju slike na njemu i traže maksimalni osnovni obeleženi četvorouglovi.

Maksimalni obeleženi osnovni četvorougao je osnovni obeleženi četvorougao koji se ne sadrži ni u jednom drugom osnovnom obeleženom četvorouglu.

Sada svakom maksimalnom osnovnom obeleženom četvorouglu jednoznačno odgovara jedna prosta implikanta.

Četiri obeležena polja u uglovima čine jedan maksimalni osnovni obeleženi četvorougao $\begin{array}{|c|c|}\hline \star & \star \\ \hline \star & \star \\ \hline \end{array}$ kome odgovara prosta implikanta yu.

Četiri obeležena polja u preseku prve i četvrte vrste s poslednje dve kolone čine maksimalni osnovni obeleženi četvorougao $\begin{array}{|c|c|}\hline \star & \star \\ \hline \star & \star \\ \hline \end{array}$ kome odgovara prosta implikanta $x'u$.

Dva obeležena polja u preseku treće vrste s drugom i trećom kolonom čine maksimalni osnovni obeleženi četvorougao $\begin{array}{|c|c|}\hline \star & \star \\ \hline \end{array}$ kome odgovara prosta implikanta $y'z'u'$.

I, na kraju, dva obeležena polja u preseku treće kolone s poslednje dve vrste čine maksimalni osnovni obeleženi četvorougao $\begin{array}{|c|}\hline \star \\ \hline \star \\ \hline \end{array}$ kome odgovara prosta implikanta $x'y'z'$.

Naravno, sve posmatramo na površini torusa pa se stoga ona četiri obeležena polja u uglovima tabele na površini torusa vide kao $\begin{array}{|c|c|}\hline \star & \star \\ \hline \star & \star \\ \hline \end{array}$

Kako u ovom primeru postoje samo četiri maksimalna osnovna obeležena četvorougla, to postoje tačno četiri proste implikante Bulove funkcije f – $yu, x'u, y'z'u', x'y'z'$.

$MDNF$ sada se dobija tako što se uzme minimalni broj maksimalnih osnovnih obeleženih četvorouglova (prostih implikanti) tako da je njima prekriveno svako obeleženo polje (bar jednim od njih). Disjunkcija tih prostih implikanti je tražena $MDNF$, tj. u ovom primeru biće samo jedna, i to $yu+x'u+y'z'u'$.

Zadatak 4.63 *Napisati $SDNF$, sve proste implikante i sve minimalne DNF Bulove funkcije f definisane tabelom:*

x	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
y	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
z	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
u	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
f	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1

Rešenje: $SDNF$ je
$xy'zu + xy'zu' + xy'z'u' + x'yzu + x'yz'u + x'y'zu' + x'y'z'u + x'y'z'u'$.
Sve proste implikante funkcije f jesu: $y'u', xy'z, x'yu, x'y'z', x'z'u$.
$MDNF$: $y'u' + xy'z + x'yu + x'y'z'$ i $y'u' + xy'z + x'yu + x'z'u$.

	x	x	x'	x'	
z		$\star$		$\star$	u
z		$\star$	$\star$		u'
z'		$\star$	$\star$		u'
z'			$\star$	$\star$	u
	y	y'	y'	y	

Iz prethodna dva primera vidi se da broj minimalnih disjunktivnih normalnih formi ($MDNF$) za neku Bulovu funkciju f može biti 1 ili 2. Očevidno taj broj može biti i veći.

Bulovi izrazi i Bulove funkcije veoma su značajni zbog značajne primene u drugim naukama, na primer i u elektrotehnici, jer se svako prekidačko kolo može interpretirati Bulovim izrazom tako što paralelnu vezu dveju grana, x i y predstavlja $x \vee y$, rednu (serijsku) vezu predstavlja $x \wedge y$ i $\neg x$; znači, ako je prekidač x zatvoren, onda je prekidač $\neg x$ otvoren i obratno.

Ilustrovaće se na jednom primeru primena Bulovih funkcija.

Primer 4.64 *Konstruisati električno kolo u kojem postoje jedna (ili više) sijalica i tri nezavisna prekidača, tako da ako tačno jedan prekidač promeni stanje, onda i sijalica promeni stanje.*

Jasno je da prekidač ima dva stanja, 0 ili 1, a sijalica takođe dva stanja 0 ili 1 (isključena ili uključena). Jasno je da ako tačno dva prekidača promene stanje, tada sijalica ne promeni stanje i ako tačno tri prekidača promene stanje, tada i sijalica promeni stanje. Neka su x, y, z promenljive koje su oznake za ta tri prekidača, a $f(x, y, z)$ oznaka za sijalicu. Zadatak je konstruisati (odrediti, napisati) Bulovu funkciju koja ima osobinu da ako tačno jedna promenljiva promeni vrednost, tada i funkcija promeni vrednost, ako tačno dve promenljive promene vrednost, tada funkcija ne promeni vrednost i ako sve tri promenljive promene vrednost, tada funkcija promeni vrednost.

Da bi se napisala tablica te funkcije f poželjno bi bilo da se uređene trojke iz skupa $\{0,1\}^3 =$
$= \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$ napišu tačno jedna ispod druge u osam vrsta i tri kolone, tako da se svake dve susedne uređene trojke razlikuju na tačno jednom mestu. To se može dobiti, na primer, obilaskom svih temena kocke (kroz svako teme tačno jedanput) krećući se neprekidno po ivicama te kocke i upisivanjem koordinata svakog temena kocke kroz koje prođemo, gde je to kocka čija temena $ABCDA_1B_1C_1D_1$ imaju za koordinate redom
$(0,0,0),(1,0,0),(1,1,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,0,1),(1,1,1),(0,1,1)$. U teoriji grafova to se naziva Hamiltonov put, odnosno put koji prolazi kroz svaki čvor grafa tačno jedanput. Ako se krene od temena $A(0,0,0)$, tada će to biti put $ABCDD_1C_1B_1A_1$. Tada se u četvrtoj koloni piše naizmenično

0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1 i dobija se tabela tražene funkcije:

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
1	0	0	1
1	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	1	1	1
1	0	1	0
0	0	1	1

Sada je očevidno da ova Bulova funkcija zadovoljava tražene uslove, pa je time kreativni deo posla završen. $SDNF$ te Bulove funkcije je $f(x,y,z) = xy'z' + xyz + x'yz' + x'y'z$. Iz Karnoove tabele

	x	x	x'	x'
z	$\star$		$\star$	
z'		$\star$		$\star$
	y	y'	y'	y

sledi da je ova $SDNF$ i minimalna, pa se može nacrtati električno kolo koje je traženo u zadatku:

4 GRANE!

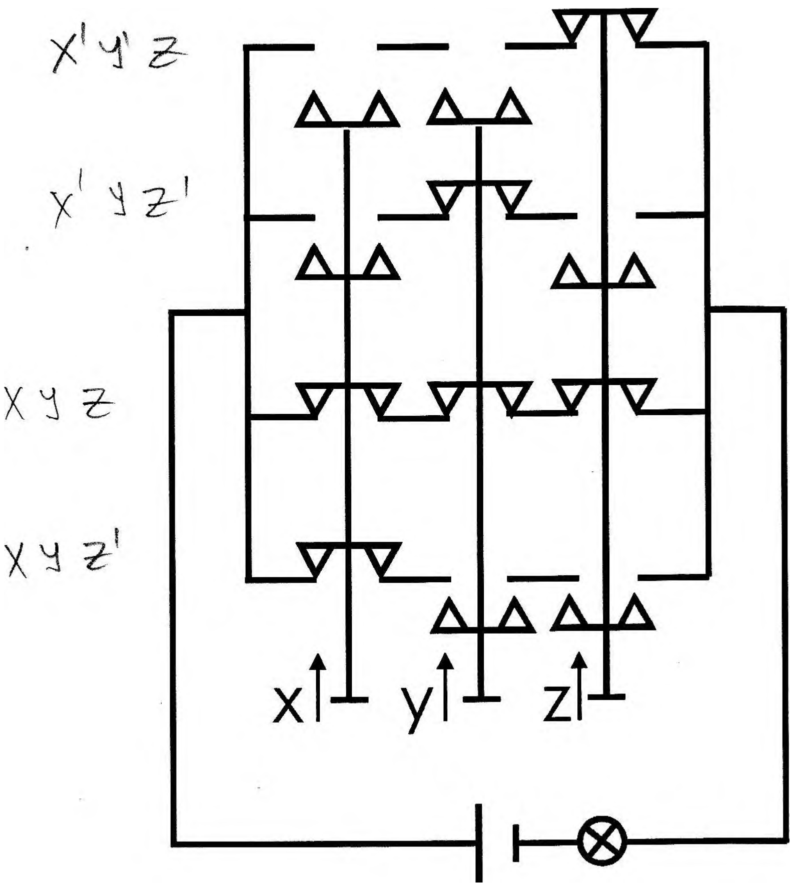


Figure 4.2:

Poglavlje 5

GRUPOIDI I GRUPE

Definicija 5.1 *Ako je* $* : A^2 \to A$ *funkcija skupa* A^2 *u neprazni skup* A, *tada je* $*$ *binarna operacija nepraznog skupa* A.

f-ja A

Prva binarna operacija s kojom se sreće još u prvom razredu osnovne škole jeste operacija sabiranja $+ : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, koja svaki uređen par, čije su komponente prirodni brojevi, preslikava u neki prirodan broj. Na primer, uređen par $(3,4)$ funkcijom (binarnom operacijom) $+$ preslikava se u prirodni broj 7, tj. $+(3,4) = 7$. Umesto oznake $+(3,4) = 7$ češće se koristi oznaka $3 + 4 = 7$.

Definicija 5.2 *Ako je* $*$ *binarna operacija* **nepraznog** *skupa* $A \neq \emptyset$, *tada se uređen par* $(A, *)$ *naziva* **grupoid**.

ZATVORENOST

Zadatak 5.3 *Da li su sledeći uređeni parovi grupoidi:*
a) $(\mathbb{N}, +)$ *b)* $(\mathbb{N}, \cdot)$ *c)* $(\mathbb{N}, -)$ *d)* $(\mathbb{Z}, -)$ *e)* $(\mathbb{Z}, \cdot)$ *f)* $(\mathbb{Z}\backslash\{0\}, :)$ *g)* $(\mathbb{R}, :)$ *h)* $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, :)$ *i)* $(\{-1,0,1\}, \cdot)$ *j)* $(\{-1,1\}, \cdot)$ *k)* $(\{-1,0,1\}, +)$.

Rezultat

a) Da b) Da c) Ne d) Da e) Da f) Ne g) Ne h) Da i) Da j) Da k) Ne.

Kako je binarna operacija funkcija, to pravila o zapisivanju i zadavanju funkcija važe i za binarne operacije. Binarne operacije konačnih skupova mogu se zadavati i takozvanim Kejlijevim tablicama. Kejlijeva tablica konačnog grupoida $(A, *)$ formira se na sledeći način. U gornjem levom uglu neke tabele napiše se simbol binarne operacije, zatim se svi elementi toga konačnog skupa A napišu u gornjoj vrsti te tabele u proizvoljnom poretku. Ta vrsta se naziva granična vrsta. Zatim se u levoj koloni (graničnoj koloni) napišu svi elementi skupa A u istom poretku kao i u graničnoj vrsti. U graničnoj vrsti elementi se upisuju sleva nadesno, a u graničnoj koloni od gore prema dole. Sada se „rezultat" od $a * b$, gde je a u graničnoj koloni a b u graničnoj vrsti, upisuje u preseku vrste desno od a i kolone ispod b, za sve a i b iz skupa A. Na primer, grupoid $(\{-1, 0, 1\}, \cdot)$, gde je operacija $\cdot$ obično množenje u skupu $\mathbb{Z}$ (tj. njena restrikcija!), određen je i tablicom

$\cdot$	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

Definicija 5.4 *Grupoid $(A, *)$ je*

МОНОИД

a) polugrupa (asocijativan) ako

$$(\forall x, y, z \in A)\ (x * y) * z = x * (y * z),$$

b) komutativan ako $(\forall x, y \in A)\ x * y = y * x,$

c) sa levim neutralnim elementom ako

$$(\exists e \in A)(\forall x \in A)\ \ e * x = x.$$

d) sa levim inverznim elementom ako

$$(\forall x \in A)(\exists x' \in A)\ \ x' * x = e.$$

Uobičajeno je da se umesto grupoid ili grupa $(A, *)$ kratko kaže samo grupoid ili grupa A.

Definicija 5.5 *Uređen par $(A, *)$ je grupa ako postoji takav element e iz skupa A da važe aksiomi:*

A_1 *$(A, *)$ je grupoid (zatvorenost)*

A_2 *Operacija $*$ je asocijativna,*

A_3 $(\forall x \in A)\ \ e * x = x$ *(postoji levi neutralni element),*

A_4 $(\forall x \in A)(\exists x' \in A)$ $x' * x = e$ *(postoji levi inverzni element),*

i tada se ta grupa označava sa $(A, *, ', e)$. *Grupa u kojoj važi komutativni zakon naziva se komutativna ili Abelova grupa. Skup* A *naziva se nosač grupe* $(A, *, ', e)$.

Ako je iz konteksta jasno da je e neutralni element grupe $(A, *, ', e)$ ili je dogovoreno da je neutralni element e i da je a' inverzni za a, ta grupa se tada označava kraće samo sa $(A, *)$ ili, još kraće, samo njenim nosačem A.

U daljem radu, ako se drukčije ne kaže, smatraće se da je e neutralni element grupe.

U nekim udžbenicima, činjenica da je $(A, +)$ grupoid iskazuje se tako što se kaže da je operacija (funkcija) $+$ zatvorena u skupu A.

Činjenica 5.6

$(A, +)$ *je grupa akko važi* **1)***zatvorenost,* **2)***asocijativnost,* **3)***postojanje neutralnog elementa,* **4)***postojanje inverznog elementa.*

Zadatak 5.7 *Ispitati da li su sledeći uređeni parovi grupe: a)* $(\mathbb{N}, +)$; *b)* $(\mathbb{Z}, +)$; *c)* $(\mathbb{Q}, +)$; *d)* $(\mathbb{R}, +)$; *e)* $(\mathbb{C}, +)$; *f)* $(\{-2, -1, 0, 1, 2\}, +)$; *g)* $(\mathbb{Z}, -)$; *h)* $(\mathbb{N}, \cdot)$; *i)* $(\mathbb{Z}, \cdot)$; *j)* $(\mathbb{Q}, \cdot)$; *k)* $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$; *l)* $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$; *m)* $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \cdot)$; *n)* $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$; *o)* $(\mathbb{R}^+, \cdot)$, *gde su* $+$, $-$ *i* $\cdot$ *operacije sabiranja, oduzimanja i množenja u skupu prirodnih* $(\mathbb{N})$, *celih* $(\mathbb{Z})$, *racionalnih (razlomaka)* $(\mathbb{Q})$, *realnih* $(\mathbb{R})$, *pozitivnih racionalnih* $(\mathbb{Q}^+)$ *itd.*

Rešenje a) $(\mathbb{N}, +)$ je polugrupa bez neutralnog elementa, znači nije grupa; b) $(\mathbb{Z}, +)$ jeste grupa jer je $(\mathbb{Z}, +)$ asocijativni grupoid, nula je neutralni element, a inverzni za k je $-k$; c), d) i e) analogno kao pod b); f) $(\{-2, -1, 0, 1, 2\}, +)$ nije grupa jer nije čak ni grupoid pošto $+$ nije binarna operacija skupa $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Na primer, $2+1 = 3$, što znači da $+$ nije funkcija koja preslikava kvadrat toga skupa u taj skup, već u skup $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; g) $(\mathbb{Z}, -)$ jeste grupoid, ali nije asocijativan stoga što, na primer $((-2) - (-3)) - (4) \neq (-2) - ((-3) - (4))$; h) $(\mathbb{N}, \cdot)$ jeste polugrupa s neutralnim elementom, ali ne postoji inverzni element za svaki element, na primer $(\forall n \in \mathbb{N}) 2 \cdot n \neq 1$; i) Isto kao i $(\mathbb{N}, \cdot)$; j) $(\mathbb{Q}, \cdot)$ jeste polugrupa s neutralnim elementom 1 i svaki $x \in \mathbb{Q}$ ima sebi inverzni $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$ izuzev nule, te samo zato $(\mathbb{Q}, \cdot)$ nije grupa; k) $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$ na osnovu prethodnog razmatranja i teoreme 5.24 očevidno je grupa, a i preostali uređeni parovi su grupe.

Teorema 5.8 *U grupi $(A,*)$ levi inverzni element je i desni inverzni element i jedinstven je, a levi neutralni element je i desni neutralni i jedinstven je.*

Teorema 5.9 *U grupi $(A,*)$ levi inverzni element je i desni inverzni element i naziva se inverzni element.*

Dokaz Neka je x' levi inverzni element za x i x'' levi inverzni element za x', tj. $x' * x \overset{A_3}{=} e$ i $x'' * x' \overset{A_3}{=} e$. Tada je $x * x' \overset{A_2}{=} e * (x * x') \overset{A_3}{=} (x'' * x') * (x * x') \overset{A_1}{=} x'' * ((x' * x) * x') \overset{A_3}{=} x'' * (e * x') \overset{A_2}{=} x'' * x' \overset{A_3}{=} e$. □
Iznad svake jednakosti pišu se aksiome, teoreme ili definicije zbog kojih je jednakost tačna.

Teorema 5.10 *U grupi $(A,*)$ levi neutralni je i desni neutralni i naziva se neutralni element.*

Dokaz $x * e \overset{A_3}{=} x * (x' * x) \overset{A_1}{=} (x * x') * x \overset{4.6.}{=} e * x \overset{A_2}{=} x$. □

Teorema 5.11 *Neutralni element je jedinstven.*

Dokaz Pretpostavimo da su e_1 i e_2 neutralni elementi. Tada je $e_1 * e_2 = e_1$ jer je e_2 neutralni element i $e_1 * e_2 = e_2$ jer je e_1 neutralni element, pa sledi $e_1 = e_2$. □

Teorema 5.12 *Inverzni element u grupi $(A,*)$ je jedinstven.*

Dokaz Neka su a' i a'' inverzni elementi proizvoljnom elementu a iz A. Tada je

$$a' \overset{5.10}{=} a' * e \overset{5.9}{=} a' * (a * a'') \overset{A_1}{=} (a' * a) * a'' \overset{A_3}{=} e * a'' \overset{A_2}{=} a''. \quad \square$$

Teorema 5.13 *Za svaki element a grupe $(A,*)$ je $(a')' = a$.*

Dokaz

$$a \overset{5.7.}{=} a * e \overset{5.6.}{=} a * (a' * (a')') \overset{A_1}{=} (a * a') * (a')' \overset{5.6.}{=} e * (a')' \overset{A_2}{=} (a')'. \quad \square$$

Teorema 5.14 *U grupi $(A,*)$ za sve $a, b \in A$ važi:*

a) $(a * b)' = b' * a'$, $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

b) jednačine $a * x = b$ i $x * a = b$ su jednoznačno rešive u skupu A.

Dokaz

a) $(a * b) * (b' * a') \overset{A_1}{=} a * ((b * b') * a') \overset{5.9}{=} a * (e * a') \overset{A_2}{=} a * a' \overset{5.9}{=} e$ odakle je $(a * b)' = b' * a'$, zbog A_3, 5.9 i 5.12

b) Dokazati samo za prvu jednačinu, jer je za drugu dokaz sličan. Iz te jednakosti sledi da je $a' * (a * x) = a' * b$, a odavde zbog asocijativnosti i aksioma o levom neutralnom i levom inverznom elementu sledi $x = a' * b$. Ovim je dokazana egzistencija (postojanje) rešenja. Dokazati kontradikcijom jedinstvenost rešenja. Pretpostavimo suprotno, tj. da jednačina ima bar dva različita rešenja, x_1 i x_2. Tada iz $a * x_1 = b$ i $a * x_2 = b$, kao i kod dokaza egzistencije, sledi $x_1 = a' * b$ i $x_2 = a' * b$ tj. $x_1 = x_2$, što je kontradikcija s pretpostavkom da su x_1 i x_2 različiti. □

Teorema 5.15 *U grupi $(A, *)$ važi zakon kancelacije odnosno skraćivanja*
$$(\forall a, b, c \in A)\ \ (a * b = a * c \Rightarrow b = c),$$
$$(\forall a, b, c \in A)\ \ (b * a = c * a \Rightarrow b = c).$$

Dokaz $a * b = a * c \overset{5.1}{\Rightarrow} a' * (a * b) = a' * (a * c) \overset{A_1}{\Rightarrow} (a' * a) * b = (a' * a) * c \overset{A_3}{\Rightarrow} e * b = e * c \overset{A_2}{\Rightarrow} b = c.$ □

U slučaju asocijativnosti operacije, nema potrebe stavljati zagrade. Ako se za simbol operacije grupe umesto $*$ uzme $\cdot$, tada se grupa $(A, \cdot)$ naziva multiplikativna grupa. U multiplikativnoj grupi neutralni element se označava sa 1 (ili e) i čitamo „jedinica grupe", a inverzni element za x označava se sa x^{-1}. Umesto $x \cdot y$ pisaćemo xy. U multiplikativnoj polugrupi $(G, \cdot)$ definiše se rekurzivno a^n za svako $n \in \mathbb{N}$ na sledeći način: $a^1 = a$ i $a^{n+1} = a^n a$. Ako je $(G, \cdot)$ grupa, tada se ova definicija proširuje za sve cele brojeve, tj. $a^0 = e$ i $a^{-n} = (a^{-1})^n$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Ako se za simbol operacije grupe uzme $+$, tada se grupa $(A, +)$ naziva aditivna grupa. U aditivnoj grupi neutralni element označava se sa 0 i čita „nula", dok se inverzni element elementu x označava sa $-x$ i čita se „minus x". U aditivnoj polugrupi definiše se rekurzivno na za svaki prirodni broj n i svako a iz polugrupe sa: $1a = a$ i $(n+1)a = na + a$. U aditivnoj grupi ova se definicija može proširiti na sve cele brojeve sa: $0a = 0$ i $(-n)a = n(-a)$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Analogno i grupoidi $(A, \cdot)$ i $(A, +)$ nazivaju se multiplikativni grupoid odnosno aditivni grupoid. Nazivi multiplikativna i aditivna govore samo o odabiru oznaka (simbola) za operacije, neutralne i inverzne elemente i nemaju drugo značenje.

Definicija 5.16 *Grupoid $(H, \cdot)$ je podgrupoid grupoida $(G, \cdot)$ ako je $H \subseteq G$ i operacija $\cdot$ iz $(H, \cdot)$ je restrikcija operacije $\cdot$ iz $(G, \cdot)$.*

Definicija 5.17 *Neka su $(H, \cdot)$ i $(G, \cdot)$ grupe. Tada je $(H, \cdot)$ podgrupa grupe $(G, \cdot)$ ako i samo ako je $H \subseteq G$ i operacija $\cdot$ iz $(H, \cdot)$ je restrikcija operacije $\cdot$ iz $(G, \cdot)$*

Teorema 5.18 *Neutralni element grupe $(G, \cdot)$ jeste i neutralni element svake njene podgrupe $(H, \cdot)$.*

Dokaz. Kako je $H \neq \emptyset$, to postoji $x \in H$. Ako je e_1 neutralni element iz $(H, \cdot)$, tada je $xe_1 = x$ i ako je e neutralni element iz $(G, \cdot)$, tada je i $xe = x$. Dalje iz $xe_1 = x$ i $xe = x$ sledi $xe_1 = xe$, a odavde zbog zakona kancelacije 5.15 sledi da je $e_1 = e$.

Treba primetiti da je operacija $\cdot$ iz $(G, \cdot)$ funkcija koja preslikava G^2 u G, dok je operacija $\cdot$ iz $(H, \cdot)$ funkcija koja preslikava H^2 u H. One nisu identične, ova druga je restrikcija one prve, a obeležavaju se istim simbolom jer zabuna nije moguća. Odnosno, iz konteksta će uvek biti jasno o kojoj je operaciji reč.

Na primer, grupa $(\{1, -1\}, \cdot)$ podgrupa je grupe $(\{1, -1, i, -i\}, \cdot)$, grupa $(\mathbb{Q}, +)$ je podgrupa grupe $(\mathbb{R}, +)$ itd.

Uobičajeno je da se umesto grupa $(G, \cdot)$ kaže samo grupa G ako je iz konteksta jasno o kojoj je operaciji reč i ko je neutralni element e te grupe. Drugim rečima, u tom slučaju, grupa $(G, \cdot)$ tj. $(G, \cdot, e)$ odnosno $(G, \cdot, {}', e)$ označava se samo njenim nosačem G.

Teorema 5.19 *Neka je $(G, \cdot, e)$ grupa. Skup H je nosač neke podgrupe grupe $(G, \cdot, e)$ ako i samo ako je H podskup od G i za svako x i y iz skupa H važi da xy i x^{-1} pripadaju skupu H tj.*

$$\boxed{(\forall x, y \in H) \;\; xy \in H \;\; i \;\; x^{-1} \in H.}$$

Dokaz $(\Rightarrow)$ Ovaj smer je neposredna posledica definicije podgrupe.

$(\Leftarrow)$ Treba dokazati da je $(H, \cdot, e)$ grupa, gde je operacija $\cdot$ iz $(H, \cdot, e)$ restrikcija operacije $\cdot$ iz $(G, \cdot, e)$ i da je e iz $(H, \cdot, e)$ isti onaj e iz $(G, \cdot, e)$.

Iz uslova $(\forall x, y \in H)\;\; xy \in H$ sledi da je $(H, \cdot)$ asocijativni grupoid, gde je, naravno, operacija $\cdot$ iz $(H, \cdot)$ restrikcija operacije $\cdot$ iz $(G, \cdot, e)$. Ostalo je još samo da se proveri da li neutralni element e iz $(G, \cdot, e)$ pripada skupu H.

Neutralni element e grupe $(G, \cdot, e)$ pripada skupu H, jer ako bi se u uslovima $(\forall x, y \in H)\;\; xy \in H \;\; \text{i} \;\; x^{-1} \in H$ uzelo $y = x^{-1}$, dobilo bi se $xx^{-1} = e \in H$. Taj neutralni element e iz G jeste neutralni za grupoid (grupu) $(H, \cdot)$, jer je neutralni element u grupi jedinstven. Videti teoremu 5.11.

Definicija 5.20 *Funkcija $f : G \to H$ homomorfizam je grupoida $(G, *)$ u grupoid $(H, \circ)$ ako*

$$(\forall x, y \in G) \;\; f(x * y) = f(x) \circ f(y).$$

Definicija 5.21 *Bijektivni homomorfizam naziva se izomorfizam.*

Izomorfizam grupoida u samog sebe naziva se automorfizam. Sirjektivni homomorfizam je epimorfizam, a injektivni homomorfizam – monomorfizam. Homomorfizam grupoida u samog sebe naziva se endomorfizam. Za grupoide (grupe) kaže se da su izomorfni ako postoji bar jedan izomorfizam koji preslikava jedan grupoid (grupu) na drugi grupoid (grupu).

Na primer, funkcija $f : \mathbb{Z} \to \{1, -1, i, -i\}$ definisana sa $f(k) = i^k$ epimorfizam je grupe $(\mathbb{Z}, +)$ i grupe $(\{1, -1, i, -i\}, \cdot)$. Logaritamska funkcija, bijekcija, $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ izomorfizam je grupa $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ i $(\mathbb{R}, +)$.

Teorema 5.22 *Ako je f izomorfizam grupoida $(G, *)$ u grupoid $(H, \circ)$, tada je i f^{-1} izomorfizam grupoida $(H, \circ)$ u grupoid $(G, *)$.*

Dokaz Kako je f bijekcija skupa G u skup H, to je i f^{-1} bijekcija skupa H u skup G, pa za sve $x, y \in G$ postoje $x_1, y_1 \in H$ takvi da je $x = f^{-1}(x_1)$ i $y = f^{-1}(y_1)$. Uvršćivanjem u $f(x * y) = f(x) \circ f(y)$ dobija se $f\big(f^{-1}(x_1) * f^{-1}(y_1)\big) = f\big(f^{-1}(x_1)\big) \circ f\big(f^{-1}(y_1)\big)$ odnosno sledi $f\big(f^{-1}(x_1) * f^{-1}(y_1)\big) = x_1 \circ y_1$, a primenom funkcije f^{-1} sledi $f^{-1}(x_1) * f^{-1}(y_1) = f^{-1}(x_1 \circ y_1)$, tj. f^{-1} je izomorfizam.

Lema 5.23 *Neka je funkcija f homomorfizam grupa $(G_1, \star)$ i $(G_2, \circ)$ i neka su e_1 i e_2 neutralni elementi tih grupa. Tada je $f(e_1) = e_2$.*

PR: $f(1) = 0$

Dokaz Za svako x iz G_1 važi

$$x \star e_1 = x \;\Rightarrow\; f(x \star e_1) = f(x) \;\Rightarrow\; f(x) \circ f(e_1) = f(x) \;\Rightarrow\; f(e_1) = e_2. \;\Box$$

Teorema 5.24 *Neka je $(A, *)$ polugrupa s neutralnim elementom i neka je B podskup od A onih i samo onih elemenata koji imaju sebi inverzne u skupu A. Tada je $(B, *)$ grupa, gde je $*$ iz $(B, *)$ restrikcija operacije $*$ iz $(A, *)$.*

Teorema 5.25 *Ako su grupoidi $(G_1, +)$ i $(G_2, \cdot)$ izomorfni, tada:*

a) Ako u G_1 postoji neutralni element, onda mora postojati i u G_2 neutralni element i tim izomorfizmom neutralni element se preslikava na neutralni element.

b) Ako je $(G_1, +)$ asocijativan, onda je i $(G_2, \cdot)$ asocijativan. Isto važi i za komutativnost.

c) Ako G_1 ima neutralni element i ako je $a' \in G_1$ inverzni za $a \in G_1$, onda je $f(a')$ inverzni za $f(a)$, gde je f izomorfizam tih grupoida.

Dokaz

a) Neka je e_1 neutralni element iz G_1 odnosno
$$(\forall a_1 \in G_1) \quad e_1 + a_1 = a_1 + e_1 = a_1$$
tada je $\quad f(e_1 + a_1) = f(a_1 + e_1) = f(a_1) \quad$ ekvivalentno sa $f(e_1) \cdot f(a_1) = f(a_1) \cdot f(e_1) = f(a_1)$. Kako je f bijekcija, onda ako a_1 „prođe" kroz ceo skup G_1, $f(a_1)$ „proći" će kroz ceo skup G_2. Prema tome, $f(e_1) = e_2$ je neutralni element u G_2.

b) $(a+b)+c = a+(b+c) \;\Leftrightarrow\; f(a+b)\cdot f(c) = f(a)\cdot f(b+c) \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; (f(a)\cdot f(b))\cdot f(c) = f(a)\cdot(f(b)\cdot f(c))$ zbog izomorfnosti funkcije f. Analogno se dokazuje i za komutativnost.

c) Neka je $a' + a = a + a' = e_1$, gde je e_1 neutralni element iz G_1. Tada iz jednakosti $f(a'+a) = f(a+a') = f(e_1)$ sledi da je i $f(a')\cdot f(a) = f(a)\cdot f(a') = e_2$. Znači, ako je a' inverzni za a, onda je $f(a')$ inverzni za $f(a)$. $\square$

Iz svega ovoga sledi da ako je grupoid $(G_1,+)$ izomorfan grupi $(G_2,\cdot)$, onda je i $(G_1,+)$ grupa.

Naravno, važi i mnogo više, to jest ako su dve algebarske strukture izomorfne, tada svi zakoni koji važe u jednoj, važe i u drugoj algebarskoj strukturi. Tada je uobičajeno da se i elementi njihovih nosača obeležavaju istim simbolima odnosno na neki način se identifikuju, iako su to u suštini različiti matematički objekti.

Zadatak 5.26 *Neka je $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ funkcija koja preslikava skup svih uređenih parova realnih brojeva u samog sebe definisana izrazom $f(x,y) = (ax+by, cx+dy)$, gde su a,b,c,d dati realni brojevi. Za koje je vrednosti realnih parametara a,b,c i d funkcija f je:*
a) *injektivna,* **b)** *sirjektivna,* **c)** *bijektivna,* **d)** *ima inverznu f^{-1} i odrediti je,*
e) *takva da uređen par* $\Big(\{f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 | f(x,y) = (ax+by, cx+dy)\}, \circ\Big)$ *jeste grupa.*

Rešenje: **a)** $ad-bc \neq 0$. **b)** $ad-bc \neq 0$. **c)** $ad-bc \neq 0$.
d) $f^{-1}(x,y) = \left(\frac{dx-by}{ad-bc}, \frac{-cx+ay}{ad-bc}\right)$, jer je $f(f^{-1}(x,y)) = (x,y)$ **e)** $ad-bc \neq 0$.

Primer 5.27
Neka je funkcija $f_a:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definisana sa $f_a(x,y) = (0, -ax+ay)$ i neka je
$\mathcal{F} = \Big\{f_a:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 | f_a(x,y) = (0,-ax+ay) \;\wedge\; a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\Big\}$
a) *Da li je f_a funkcija za svako $a \in \mathbb{R}$?*
b) *Da li je f_a injektivna funkcija za svako $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$?*
c) *Da li je f_a sirjektivna funkcija za svako $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$?*
d) *Da li je f_a bijektivna funkcija za svako $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$?*
e) *Da li je $(\mathcal{F},+)$ grupa, gde je $(f_a+f_b)(x,y) \overset{def}{=} f_a(x,y)+f_b(x,y)$?*
f) *Da li je $(\mathcal{F},\circ)$ grupa, gde je $\circ$ kompozicija funkcija? $(f_a \circ f_b)(x,y)$=?*
h) *Da li je $(\mathcal{F},\circ)$ izomorfno sa grupom $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$?*
i) *Da li je $(\mathcal{F},+)$ izomorfno sa grupom $(\mathbb{R},+)$?*

Videti 15.5 i 15.6

Primer 5.28 *Da li je* $(\{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}, \circ)$ *grupa, gde su funkcije* $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definisane jednakostima* $f_0(x,y,z) = (x,y,z)$, $f_1(x,y,z) = (y,z,x)$, $f_2(x,y,z) = (z,x,y)$, $f_3(x,y,z) = (x,z,y)$, $f_4(x,y,z) = (y,x,z)$, $f_5(x,y,z) = (z,y,x)$. *Šta je geometrijska interpretacija za* f_i ?

Primer 5.29 *Neka su funkcije* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *i* $g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definisane izrazima* $f(x_1, x_2) = (4x_1 - 5x_2, 2x_1 + 7x_2)$, $h(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}(-2x_2 - 2x_3, 2x_1 + x_3, 2x_1 - x_2)$
i $g(x_1, x_2, x_3) = (5x_1 + 6x_2 - 6x_3, -8x_1 - 11x_2 + 12x_3, -4x_1 - 6x_2 + 7x_3)$,
a) Odrediti $(f \circ f)(x_1, x_2)$. *Videti* 15.5. *b) Odrediti* $g(1,1,1)$ *i* $g(5,-7,-3)$.
c) Odrediti $(g \circ g)(x_1, x_2, x_3)$. *d) Odrediti* $g^{-1}(x_1, x_2, x_3)$.
e) Odrediti $(\underbrace{g \circ g \circ \ldots \circ g}_{2009})(x_1, x_2, x_3) \stackrel{def}{=} g^{(2009)}(x_1, x_2, x_3)$.
f) Odrediti $h^{(2)} = h \circ h$ *i* $h^{(3)} = h \circ h \circ h$ *i pokazati da je* $h^{(3)} = -h$, $h^{(4)} = -h^{(2)}$, $h^{(5)} = h$, $h^{(4k\pm1)} = \pm h$, $h^{(4k)} = -h^{(2)}$ *i* $h^{(4k+2)} = h^{(2)}$.
g) Da li među funkcijama $h, h^{(2)}, -h, -h^{(2)}$ *postoji identička funkcija?*
h) Da li je $(\{h, h^{(2)}, -h, -h^{(2)}\}, \circ)$ *grupoid i da li je grupa?*
i) Da li je $(\{i_d, h, h^{(2)}, -h, -h^{(2)}\}, \circ)$ *asocijativni grupoid sa neutralnim elementom i da li je grupa, gde je* i_d *identička funkcija?*
j) Da li je $(\{i_d, g\}, \circ)$ *grupoid i da li je grupa?*
k) Da li je $(\{h, h^{(2)}, -h, -h^{(2)}\}, \circ)$ *podgrupa od* $(\{f | f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\}, \circ)$?
l) Da li je $(\{h, h^{(2)}, -h, -h^{(2)}\}, \circ)$ *izomorfno sa grupom iz* 5.42.

Definicija 5.30 *Neka su* $(G, \cdot)$ *grupoid i* ρ *relacija ekvivalencije definisana u skupu* G. *Tada je relacija* ρ **kongruencija** *ako*

$$(\forall x, y, u, v \in G) \ (x \rho u \ \wedge \ y \rho v) \Rightarrow xy \rho uv.$$

Zadatak 5.31 *Relacija* $\equiv_m$ *definisana u skupu celih brojeva* $\mathbb{Z}$ *sa*

$$(\forall x, y \in \mathbb{Z}) \ (x \equiv_m y \ \Leftrightarrow \ m | x - y)$$

što se obično označava i sa $x \equiv y \pmod{m}$ *i čita se „*x *je kongruentno sa* y *po modulu* m*", odnosno* x *i* y *imaju iste ostatke pri deljenju sa* m, **jeste kongruencija** *grupe* $(\mathbb{Z}, +)$ *i* **jeste kongruencija** *polugrupe* $(\mathbb{Z}, \cdot)$. *Dokazati.*

Rešenje Relacija $\equiv_m$ jeste ekvivalencija kao što je pokazano u 2.16, a jeste kongruencija u grupi $(\mathbb{Z}, +)$ zato što

$$(x \equiv_m y \wedge u \equiv_m v) \Rightarrow (m | x - y \wedge m | u - v) \Rightarrow m | (x + u) - (y + v) \Rightarrow$$

$$x + u \equiv_m y + v.$$

Relacija $\equiv_m$ jeste i kongruencija u $(\mathbb{Z}, \cdot)$ stoga što

$$(x \equiv_m y \wedge u \equiv_m v) \Rightarrow (m | x - y \ \wedge \ m | u - v) \Rightarrow (m | xu - yu \ \wedge \ m | yu - yv)$$

$$\Rightarrow (m|xu - yv) \Rightarrow (xu \equiv_m yv)$$

Faktor skup $\mathbb{Z}/\equiv_m$ označavaće se sa $\mathbb{Z}_m$ i kako je svaka klasa iz $\mathbb{Z}_m$ jednoznačno određena bilo kojim svojim elementom, predstavnikom (teoreme 2.14. i 2.15), to će se za predstavnika klase uzimati najmanji nenegativan ceo broj, odnosno

$$\mathbb{Z}_m = \{C_0, C_1, \ldots, C_{m-1}\}.$$

Ako je ρ kongruencija grupoida $(G, \cdot)$, tada se posmatra faktor skup G/ρ (definicija 2.13). Da li se u skupu G/ρ može definisati takva binarna operacija $*$ da bude $C_x * C_y = C_z$ ako i samo ako je xy u relaciji ρ s elementom z? Sledeća teorema daje odgovor na ovo pitanje.

Teorema 5.32 *Neka je ρ kongruencija grupoida $(G, \cdot)$. Tada jednakost $C_x * C_y = C_{xy}$, gde su x i y iz G a C_x, C_y i C_{xy} iz G/ρ, definiše binarnu operaciju $*$ u skupu G/ρ odnosno $(G/\rho, *)$ je grupoid.*

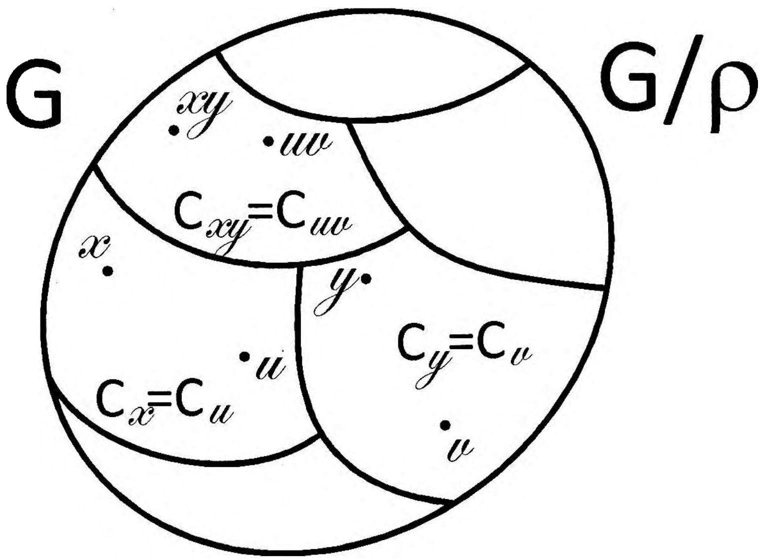


Figure 5.1:

Dokaz Treba proveriti da li $*$ jeste funkcija koja paru (C_x, C_y) pridružuje C_{xy}, tj. da li par (C_x, C_y) može da se preslika sa $*$ i u neki element različit od C_{xy}, jer ako uzmemo $u \in C_x$ i $v \in C_y$, tada je zbog 2.13. i 2.14 $(C_x, C_y) =$

(C_u, C_v), a pitanje je da li će biti i $C_{xy} = C_{uv}$? Odgovor je potvrdan samo zato što je ρ kongruencija pa važi:

$$(C_x, C_y) = (C_u, C_v) \;\Rightarrow\; (C_u = C_x \wedge C_v = C_y) \overset{2.10.}{\Rightarrow}$$

$$\overset{2.14.}{\Rightarrow} (u \,\rho\, x \;\wedge\; v \,\rho\, y) \overset{5.30.}{\Rightarrow} uv \,\rho\, xy \overset{2.14.}{\Rightarrow} C_{uv} = C_{xy}. \;\square$$

Definicija 5.33 *Ako je H podgrupa grupe G i x proizvoljni element iz G, tada $xH = \{xh | h \in H\}$.*

Teorema 5.34 *Ako je H podgrupa grupe $(G, \cdot)$ i ρ relacija definisana u skupu G sa*

$$(\forall x, y \in G)\ (x \,\rho\, y \;\Leftrightarrow\; x^{-1}y \in H),$$

tada ρ jeste relacija ekvivalencije.

Dokaz Refleksivnost relacije ρ sledi iz

$$x \,\rho\, x \Leftrightarrow x^{-1}x \in H \Leftrightarrow e \in H,$$

što je tačno jer je H podgrupa, pa joj pripada jedinica e. Simetričnost sledi iz

$$x \,\rho\, y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H \Leftrightarrow (x^{-1}y)^{-1} \in H \Leftrightarrow y^{-1}x \in H \Leftrightarrow y \,\rho\, x.$$

Tranzitivnost sledi iz

$$x \,\rho\, y \wedge y \,\rho\, z \;\Rightarrow\; (x^{-1}y \in H \wedge y^{-1}z \in H) \;\Rightarrow\; (x^{-1}y)(y^{-1}z) \in H \;\Rightarrow$$

$$x^{-1}((yy^{-1})z) \in H \;\Rightarrow\; x^{-1}(ez) \in H \;\Rightarrow\; x^{-1}z \in H \;\Rightarrow\; x \,\rho\, z. \quad \square$$

Količnički skup G/ρ obeležava se i sa G/H.

Teorema 5.35 *Klasa ekvivalencije C_x iz G/ρ, gde je ρ RST iz teoreme* 5.34, *poklapa se sa $xH = \{xh | h \in H\}$.*

Dokaz $C_x = \{\alpha | x \,\rho\, \alpha \wedge \alpha \in G\} = \{\alpha | x^{-1}\alpha \in H \wedge \alpha \in G\} =$ $\{\alpha | \exists h \in H \;\; x^{-1}\alpha = h \wedge \alpha \in G\} = \{\alpha | \exists h \in H \;\; \alpha = xh \wedge \alpha \in G\} =$ $\{\alpha | \alpha \in xH \wedge \alpha \in G\} = \{\alpha | \alpha \in xH\} = xH$ na osnovu definicija 5.33 i 2.13. $\square$

Kako su xH klase ekvivalencije za svako x iz grupe G, to su zbog teoreme 2.15. $G = \bigcup_{x \in G} xH$ i $(xH = yH \vee xH \cap yH = \emptyset)$.

Teorema 5.36 *Ako je H podgrupa grupe $(G,\cdot)$, tada za svaki element x iz G važi*

$$Card(xH) = Card(H),$$

to jest xH i H imaju isti broj elemenata.

Dokaz Konstruisaće se jedna bijektivna funkcija f skupa H u skup xH i time će dokaz biti završen. Ta funkcija f može, na primer, da bude funkcija definisana sa

$$(\forall h \in H) \;\; f(h) = xh \quad (x \text{ je fiksni elemenat iz } G).$$

Funkcija f je injektivna jer iz $f(h_1) = f(h_2)$ sledi da je $xh_1 = xh_2$ odnosno $h_1 = h_2$ za sve h_1 i h_2 iz H, jer važi zakon kancelacije 5.15 Za svako xh iz xH postoji $h \in H$ takav da je $f(h) = xh$, pa je funkcija f sirjektivna. □

Teorema 5.37 *(Lagranž)* [1] *Ako su G konačna grupa i H podgrupa od G, tada je broj svih elemenata grupe G deljiv brojem svih elemenata podgrupe H i broj $\frac{|G|}{|H|}$ naziva se indeks grupe G po podgrupi H.*

Dokaz Neposredna posledica teorema 5.35. i 5.36. □

Teorema 5.38 *Neka je a proizvoljni element konačne grupe $(G,\cdot)$. Tada je $H = \{a^n | n \in \mathbb{N}\}$ podgrupa grupe G.*

Dokaz Kako je $a \in G$, to je i $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n} \in G$ i kako je G konačan skup a $\mathbb{N}$ beskonačan skup, postoje takvi različiti prirodni brojevi, m i k (na primer, neka je $m = k+s$, gde je $s \in \mathbb{N}$) da je $a^m = a^k$, tj. $a^{k+s} = a^k$. Odavde zbog kancelacije 5.15 sledi da je $a^s = e$. Neka je l najmanji element nepraznog skupa $\{s | a^s = e \wedge s \in \mathbb{N}\}$. Sada je jasno da je $H = \{e, a, a^2, \ldots, a^{l-1}\}$, tj. $Card\ (H) = l$. Inverzni element za $a^r (r < l)$ je a^{l-r} i inverzni za e jeste e. Zatvorenost operacije $\cdot$ u skupu H očevidna je, pa zbog teoreme 5.19 sledi da je $(H,\cdot)$ podgrupa grupe $(G,\cdot)$. □

Grupe kao što je $(H,\cdot)$ nazivaju se **ciklične grupe.**

Definicija 5.39 *Red elementa a grupe $(G,\cdot)$ najmanji je prirodni broj l (ukoliko postoji), za koji je $a^l = e$, gde je e jedinica grupe G. Red konačne grupe G je broj elemenata grupe G.*

[1] *J. L. Lagrange* (1736 – 1813)

Iz 5.38 i 5.39 sledi da je red elementa a konačne grupe $(G, \cdot)$ jednak broju elemenata njene cikličke podgrupe $H = \{a^n | n \in \mathbb{N}\}$.

Posledica 5.40 *Ako su $(G, \cdot)$ konačna grupa reda n i a proizvoljni element iz G, tada je red l elementa a delitelj reda grupe, odakle dalje sledi $a^n = a^{lk} = (a^l)^k = e^k = e$.*

Teorema 5.41 *Svaka grupa $(G, \cdot)$ izomorfna je nekoj podgrupi grupe permutacija skupa G. Videti* 3.26

Dokaz Lako se proverava da funkcija $\sigma_a : G \longrightarrow G$ definisana sa

$$(*) \qquad (\forall x \in G) \ \ \sigma_a(x) = ax, \qquad a \in G$$

jeste bijekcija, to jest permutacija skupa G. Uočimo sada skup svih permutacija skupa G koje su oblika $(*)$ i označimo ga sa H odnosno

$$H = \{\sigma_a | \sigma_a : G \underset{\text{na}}{\overset{1-1}{\longrightarrow}} G \wedge a \in G \wedge (\forall x \in G)\sigma_a(x) = ax\}.$$

Lako se pokazuje da $(H, \circ)$ jeste grupa, gde je $\circ$ operacija kompozicije funkcija. Da bi se dokazalo da su $(G, \cdot)$ i $(H, \circ)$ izomorfni, mora se konstruisati (definisati) neka funkcija $\psi : G \longrightarrow H$ koja će biti bijekcija i homomorfizam, odnosno izomorfizam. Neka je funkcija $\psi : G \longrightarrow H$ definisana sa

$$(\forall a \in G) \ \ \psi(a) = \sigma_a.$$

Funkcija ψ je injektivna jer za sve p i q iz G važi $\psi(p) = \psi(q) \Rightarrow \sigma_p = \sigma_q \Rightarrow (\forall x \in G)\sigma_p(x) = \sigma_q(x) \Rightarrow (\forall x \in G)px = qx \Rightarrow p = q$. Sirjektivnost sledi iz činjenice da za svako $\sigma_a \in H$ postoji takav $a \in G$ da je $\psi(a) = \sigma_a$. I konačno, dokažimo još da je ψ homomorfizam. Treba dokazati da je $\psi(ab) = \psi(a) \circ \psi(b)$, odnosno zbog definicije funkcije ψ svodi se na to da treba dokazati da je $\sigma_{ab} = \sigma_a \circ \sigma_b$. Jednakost ovih dveju funkcija σ_{ab} i $\sigma_a \circ \sigma_b$ koje očevidno imaju isti domen G, dokazaće se tako što će se *proizvoljni* x iz G preslikati i jednom i drugom funkcijom i konstatovati da se dobija isti rezultat.

$$\sigma_{ab}(x) = (ab)x = a(bx) = \sigma_a(bx) = \sigma_a(\sigma_b(x)) = (\sigma_a \circ \sigma_b)(x). \quad \square$$

Korišćenjem prethodne teoreme dokazati da je $(\{x, y, z\}, \cdot)$ grupa ako je operacija $\cdot$ definisana tablicom

$\cdot$	x	y	z
x	x	y	z
y	y	z	x
z	z	x	y

Zadatak 5.42 *Dokazati da je $(\{1, -1, i, -i\}, \cdot)$ komutativna, Abelova grupa a $(\{1, -1\}, \cdot)$ njena podgrupa, gde je $\cdot$ restrikcija množenja u skupu kompleksnih brojeva.*

Rešenje Operacija skupa $\{1, -1, i, -i\}$ jeste restrikcija operacije skupa kompleksnih brojeva jer je proizvod svaka dva elementa iz tog skupa element iz tog skupa. Operacija je asocijativna i komutativna u celom skupu kompleksnih brojeva pa mora biti i u svakom njegovom podskupu. Neutralni element je 1, a inverzni su $1' = 1$, $(-1)' = -1$, $i' = -i$, $(-i)' = i$.

Zadatak 5.43 *Dokazati da je $(\{p | p^n = 1 \wedge p \in \mathbb{C}\}, \cdot)$ Abelova grupa, gde je n fiksni prirodan broj a operacija $\cdot$ restrikcija množenja u skupu $\mathbb{C}$.*

K(0, 1)

Zadatak 5.44 *Dokazati da je $(A, \cdot)$ Abelova grupa, gde je $A = \{e^{xi} | x \in \mathbb{R}\}$ a operacija $\cdot$ restrikcija množenja u skupu $\mathbb{C}$ (kompleksnih brojeva).*

Rešenje $(A, \cdot)$ jeste grupoid jer je $\cdot$ i operacija skupa A zato što je $e^{xi}e^{yi} = e^{(x+y)i}$ za proizvoljne x i y iz A. Množenje u skupu $\mathbb{C}$ je asocijativno i komutativno pa je onda takvo i u skupu A. Neutralni element je $e^{0i} = 1$ a inverzni za e^{xi} jeste e^{-xi}.

Zadatak 5.45 *Neka je $A = \mathbb{Q} \backslash \{-1\}$ i neka je $*$ binarna operacija definisana u skupu $\mathbb{Q}$ sa $a * b = a + b + ab$, odnosno pomoću sabiranja i množenja u skupu racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$. Da li je $(A, *)$ grupa?*

Rešenje Prvo treba dokazati da je $(A, *)$ grupoid, odnosno da je $*$ binarna operacija i za skup A. Jasno je da je $a * b \in \mathbb{Q}$ za svako a i b iz $\mathbb{Q}$ i da je $a * b$ jednoznačno određen element zbog jednoznačnosti operacija sabiranja i množenja u skupu $\mathbb{Q}$. Treba, međutim, proveriti da li je $a * b \in A$ za svako a i b iz A, odnosno ako su a i b različiti od -1, da li može biti $a + b + ab = -1$? To se ne može desiti, jer ako je $a + b + ab = -1$ onda je $a(1 + b) = -(1 + b)$, a pošto je $b \neq -1$, sledi da je $a = -1$, što je kontradikcija, s tim što su a i b različiti od -1. Znači, $(A, *)$ jeste grupoid. Operacija je asocijativna, što sledi iz $(a * b) * c = (a + b + ab) * c = a + b + ab + c + ac + bc + abc = a + b + c + bc + ab + ac + abc = a * (b + c + bc) = a * (b * c)$. Pronađimo da li postoji takav $e \in A$ da je $e * a = a$ za svako $a \in A$. Kako je $e * a = a \Leftrightarrow e + a + ea = a \Leftrightarrow e(1 + a) = 0 \Leftrightarrow e = 0$, to je levi neutralni element 0, jer je očigledno $0 * a$ jednako a za svako $a \in A$. Da li za svaki $a \in A$ postoji takav $a' \in A$ da je $a' * a = 0$? Kako je $a \neq -1$, imamo $a' * a = 0 \Leftrightarrow a' + a + a'a = 0 \Leftrightarrow a' = \frac{-a}{1+a}$ i pošto je $-\frac{a}{1+a} \neq -1$ za svako $a \in A$, to znači da je $-\frac{a}{1+a} \in A$ i da je $-\frac{a}{1+a}$ levi inverzni element za a.

Zadatak 5.46 *Dokazati da je $(A, *)$ grupa, gde je skup $A = \{(a, b) | a \in \mathbb{Q} \wedge b \in \mathbb{Q} \wedge a \neq 0\}$ a $*$ binarna operacija skupa $\mathbb{Q}^2$ definisana sa: $(a, b) * (c, d) = (ac, ad + b)$, odnosno pomoću sabiranja i množenja u skupu racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$.*

Rešenje Prvo treba ispitati da li je $*$ binarna operacija skupa A, odnosno da li je $(ac, ad + b) \in A$ za svako (a, b) i (c, d) iz A. Očigledno je to tačno, pošto su a i c različiti od nule, onda je i $ac \neq 0$. Znači $(A, *)$ jeste grupoid. Asocijativnost sledi iz: $((a, b) * (c, d)) * (e, f) = (ac, ad + b) * (e, f) = (ace, acf + ad + b) = (a, b) * (ce, cf + d) = (a, b) * ((c, d) * (e, f))$. Ispitati da li postoji levi neutralni element. Ako je to (x, y), onda mora biti $(x, y) * (a, b) = (a, b)$ za svako $(a, b) \in A$. Odnosno, $(xa, xb + y) = (a, b) \Leftrightarrow xa = a \wedge xb + y = b \Leftrightarrow x = 1 \wedge b + y = b \Leftrightarrow x = 1 \wedge y = 0$. Znači, $(1, 0)$ je levi neutralni element. Ispitati da li svaki $(a, b) \in A$ ima sebi levi inverzni element s obzirom na levi neutralni element $(1, 0)$. Odnosno, $(x, y) * (a, b) = (1, 0) \Leftrightarrow (xa, xb + y) = (1, 0) \Leftrightarrow xa = 1 \wedge xb + y = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{a} \wedge y = -\frac{b}{a}$. Znači, za proizvoljni $(a, b) \in A$ levi inverzni element je $\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right) \in A$ zbog $\frac{1}{a} \neq 0$, te je stoga $(A, *)$ jeste grupa.

Zadatak 5.47 *Ispitati grupoid $(\mathbb{Q}^2, *)$ gde je $*$ definisana sa*

$$(a, b) * (c, d) = (ac, bc + c + d)$$

i pronaći koje elemente treba izbaciti iz skupa $\mathbb{Q}^2$ (minimalni broj) da bi preostali skup imao strukturu grupe u odnosu na $*$.

Rešenje $(\mathbb{Q}^2, *)$ jeste asocijativan grupoid stoga što su $(\mathbb{Q}^2, +)$ i $(\mathbb{Q}^2, \cdot)$ grupoidi i $((a, b) * (c, d)) * (e, f) = (ac, bc + c + d) * (e, f) = (ace, bce + ce + de + e +$

$f) = (a,b)*(ce, de+e+f) = (a,b)*((c,d)*(e,f))$. Levi neutralni element je $(1,-1)$ koji je očigledno i desni neutralni element. Inverzni element za (a,b) je $\left(\frac{1}{a}, -1-\frac{b+1}{a}\right)$ ako je $a \neq 0$. Prema tome, inverzni element će postojati samo za one parove čija je prva komponenta različita od nule. Znači, $(\mathbb{Q}^2, *)$ nije grupa, ali

$(\mathbb{Q}^2 \setminus \{(0,x) | x \in \mathbb{Q}\}, *)$, zbog teoreme 5.24 jeste grupa.

Zadatak 5.48 *Dokazati da je* $\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), *\right)$ *grupa, gde je* $*$ *definisana sa* $a * b = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b)$ *za svako* a *i* b *iz* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Rešenje Iz definicija funkcija tg i arctg sledi da je $\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), *\right)$ grupoid. Asocijativnost sledi iz $(a*b)*c = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b)*c = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b)) + \operatorname{tg} c) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} a + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c))) = a * \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c) = a * (b * c)$. Ako postoji levi neutralni element x, onda mora biti:

$$x * a = a \Leftrightarrow \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} a) = a \Leftrightarrow \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} a \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

zbog injektivnosti funkcije tg nad domenom $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Znači, 0 je levi neutralni element (istovremeno i desni), a levi inverzni element za x je $-x$ (istovremeno i desni), što se jednostavno dobija i dokazuje.

Zadatak 5.49 *Dat je skup* $A = \{a + b\sqrt{2} | a \in \mathbb{Q} \wedge b \in \mathbb{Q}\}$.

a) Koji su od sledećih iskaza tačni: $0 \in A$, $2\sqrt{2} \in A$, $-5 \in A$, $1 \in A$, $2-\sqrt{2} \in A$, $\sqrt{3} \in A$, $1-\sqrt{3} \in A$?

b) Da li su uređeni parovi $(A,+)$, $(A,\cdot)$ *i* $(A \setminus \{0\}, \cdot)$ *grupe?*

Rešenje

a) $0 = 0 + 0\sqrt{2}$, $2\sqrt{2} = 0 + 2\sqrt{2}$, $-5 = -5 + 0\sqrt{2}$, $1 = 1 + 0\sqrt{2}$, $2-\sqrt{2} = 2 + (-1)\sqrt{2}$. Prema tome, samo poslednja dva iskaza su netačna.

b) $(A,+)$ jeste grupoid stoga što je $(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a+c) + (b+d)\sqrt{2} \in A$ jer ako su a, b, c, d iz $\mathbb{Q}$, onda su i $a+c$ i $b+d$ iz $\mathbb{Q}$. Asocijativnost i komutativnost su očigledne jer je A podskup skupa $\mathbb{R}$ realnih brojeva. Neutralni element je 0, a inverzni element za $a + b\sqrt{2}$ je $-a + (-b)\sqrt{2} \in A$. Prema tome, $(A,+)$ je Abelova grupa. $(A,\cdot)$ jeste grupoid stoga što je $(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2}) = (ac+2bd) + (ad+bc)\sqrt{2} \in A$, jer sabiranje i množenje u skupu $\mathbb{Q}$ ne izvodi iz $\mathbb{Q}$. Asocijativnost i komutativnost takođe su očigledne, a neutralni element je 1. Element 0 nema sebi inverzan element, pa $(A,\cdot)$ nije grupa. Ako je $a + b\sqrt{2} \in A \setminus \{0\}$ i njemu inverzni $x + y\sqrt{2}$, onda je $(a+b\sqrt{2})(x+y\sqrt{2}) = 1+0\sqrt{2}$, odakle sledi da je $x = \frac{a}{a^2-2b^2}$ i $y = \frac{-b}{a^2-2b^2}$. A kako su a i b racionalni brojevi od kojih je bar jedan različit od nule, onda je i $a^2-2b^2 \neq 0$ jer, kad bi bilo $a^2-2b^2=0$ odnosno $a = \pm b\sqrt{2}$, to bi značilo da su ili oba nule ili je neki od njih iracionalan broj, što je kontradikcija s pretpostavkom o brojevima a i b. Na osnovu teoreme 5.24 sledi da $(A\backslash\{0\},\cdot)$ jeste Abelova grupa.

Zadatak 5.50 *Napisati Kejlijeve tablice grupa* $(\{0,1,2,3\},+)$ *i* $(\{1,i,-1,-i\},\cdot)$, *gde je* $\{0,1,2,3\}$ *faktor skup u odnosu na relaciju* $\equiv_4$, *a* $+$ *operacija iz* 5.31, 5.32, 5.2 *(sabiranje po modulu 4) i dokazati njihovu izomorfnost.*

Rešenje

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\cdot$	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

Funkcija $f(k) = i^k$ to jest $f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}$ je izomorfizam među tim grupama jer se te dve tablice razlikuju samo u oznakama pa je uslov $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$ očigledno zadovoljen za proizvoljne x i y iz $\mathbb{Z}_4$, a bijektivnost funkcije f takođe je očigledna. Grupe izomorfne ovim grupama nazivaju se ciklične grupe reda 4.

Zadatak 5.51 *Neka su* p_1, p_2, p_3 *i* p_4 *permutacije skupa* $S = \{1,2,3,4\}$ *definisane sa:*

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad p_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dokazati da je $(\{p_1,p_2,p_3,p_4\},\circ)$ *grupa, gde je* $\circ$ *operacija kompozicije (slaganja) funkcija odnosno permutacija, to jest*

$$(p_1 \circ p_2)(x) = p_1(p_2(x)).$$

Rešenje Sastaviti Kejlijevu tablicu ove operacije. Na primer: $p_1 \circ p_2 = p_3$, $p_3 \circ p_2 = p_1$, itd. Tablica izgleda ovako:

$\circ$	p_1	p_2	p_3	p_4
p_1	p_4	p_3	p_2	p_1
p_2	p_3	p_4	p_1	p_2
p_3	p_2	p_1	p_4	p_3
p_4	p_1	p_2	p_3	p_4

Da bi Kejlijeva tablica sa tako pisanom graničnom vrstom i kolonom (tj. istim redosledom i svi elementi tablice su iz te granične vrste i kolone) bila tablica neke grupe, treba da važi asocijativnost i:

a) Postoje vrsta i kolona s istim rednim brojem koje su jednake graničnoj vrsti odnosno koloni. Granični element te vrste odnosno kolone neutralni je element p_4.

b) U svakoj vrsti i svakoj koloni neutralni element treba da se nalazi tačno jedanput (što mora da važi i za sve ostale elemente) i mora biti simetrično raspoređen u odnosu na glavnu dijagonalu (od levog gornjeg do desnog donjeg ugla). Dokazati.

Ako za Kejlijevu tablicu konačne polugrupe (grupoid u kome važi asocijativnost) važi prethodno rečeno, onda je ona grupa. Kako je par $(\{p_1, p_2, p_3, p_4\}, \circ)$ polugrupa, jer je komponovanje funkcija asocijativno, i pošto za njenu Kejlijevu tablicu važe uslovi a) i b), to je ona grupa, a kako je tablica simetrična, onda je ona Abelova grupa. Sve grupe izomorfne ovoj grupi nazivaju se Klajnove grupe reda 4. Grupa iz zadatka 5.55 b) izomorfna je ovoj grupi, kao i grupa svih osnih simetrija koje preslikavaju pravilni tetraedar u samog sebe.

Zadatak 5.52 *Neka je grupoid $(G, *)$ definisan Kejlijevom tablicom:*

$*$	b	a	c	d
b	a	b	d	c
a	b	a	c	d
c	d	c	a	b
d	c	d	b	a

KLAJNOVA GRUPA

Da li je $(G, *)$ grupa?

Rešenje $(G,*)$ jeste komutativna grupa jer je $(G,*)$ izomorfan s grupom iz prethodnog zadatka. Izomorfizam je, na primer, funkcija $f=\begin{pmatrix} b & a & c & d \\ p_1 & p_4 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$, što se jednostavno proverava.

Zadatak 5.53 *Da li grupoidi* $(G,*)$ *i* $(H,\circ)$ *s Kejlijevim tablicama*

$*$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	4	5	6	1
3	3	4	1	6	2	5
4	4	5	6	1	3	2
5	5	6	2	3	1	4
6	6	1	5	2	4	3

$\circ$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

imaju strukture grupe, gde je $H=G=\{1,2,3,4,5,6\}$?

Rešenje $(G,*)$ Videti rešenje zadatka 5.51.

Element 1 je neutralan jer je prva vrsta jednaka graničnoj vrsti i prva kolona jednaka graničnoj koloni. Pošto je taj neutralni element raspoređen simetrično u odnosu na glavnu dijagonalu i u svakoj vrsti i koloni pojavljuje se tačno jedanput (što važi i za sve ostale elemente), to znači da za svaki element postoji jedinstveni inverzni element pa je operacija komutativna. Da bi $(G,*)$ bio grupa potrebna je još samo asocijativnost. Međutim, operacija $*$ nije asocijativna jer je, na primer, $(3*4)*5=6*5=4$, a dok je $3*(4*5)=3*3=1$ pa operacija $*$ nije asocijativna, odnosno $(G,*)$ nije grupa.

$(H,\circ)$ jeste komutativna grupa jer je to množenje po modulu 7, tj. $(H,\circ)=(\mathbb{Z}_7\setminus\{0\},\cdot)$.

Zadatak 5.54 *Da li se nepotpune Kejlijeve tablice grupoida* $(A,*)$ *i* $(B,*)$

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a			
b		e	e

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a				e
b		e		
c			e	

mogu dopuniti tako da predstavljaju tablice polugrupa.

Rešenje Ispitajmo to prvo za grupoid $(A, *)$.

Pošto je $(b*b)*b = e*b = b$, mora biti i $b*(b*b) = b*e = b$. Dalje, pošto je $(b*a)*a = e*a = a$, mora biti i $b*(a*a) = b*x = a$. Međutim, $b*x \neq a$ jer su u trećoj vrsti elementi b, e, e, pa je odgovor negativan. Dokazati to na drugi način. Iz tablice se vidi da postoji levi neutralni element e za koji svaki element ima sebi levi inverzni. Ako bi grupoid $(A, *)$ bio asocijativan, onda bi bio i grupa, što je nemoguće jer se u trećoj vrsti e pojavljuje dva puta. Analogno se može dokazati, takođe na dva načina, i za grupoid $(B, *)$.

Zadatak 5.55 *Dokazati da su sledeći uređeni parovi grupe:*
a) $(\{f, f_1, f_2\}, \circ)$ *b)* $(\{f, f_1, f_2, g_1, g_2, g_3\}, \circ)$ *c)* $(\{h, h_1, h_2, h_3\}, \circ,)$ *gde su* $f(x) = x$, $f_1(x) = \frac{1}{1-x}$, $f_2(x) = \frac{x-1}{x}$, $g_1(x) = \frac{1}{x}$, $g_2(x) = \frac{x}{x-1}$, $g_3(x) = 1 - x$, $h(x) = x$, $h_1(x) = \frac{1}{x}$, $h_2(x) = -x$, $h_3(x) = -\frac{1}{x}$ *funkcije nad domenom* $\mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$, *a operacija* $\circ$ *kompozicija funkcija.*

Uputstvo Pošto je komponovanje funkcija asocijativno, treba samo sastaviti Kejlijeve tablice tih operacija i sprovesti ispitivanje kao u zadatku 5.51. Takođe je važno primetiti da ako su slike ovih funkcija 0 ili 1, tada su i njihovi originali 0 ili 1. Grupa pod b) izomorfna je grupi iz zadatka 5.51, a grupa pod a) izomorfna je grupama iz zadataka 5.62, 5.63, 5.28 i 7.44.

Zadatak 5.56 *Dokazati da su* $(A, +)$ *i* $\left(A\backslash\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}, \cdot\right)$ *grupe gde je* $A = \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a & a \end{bmatrix} | a \in \mathbb{Q}\right\}$, *a* $+$ *i* $\cdot$ *operacije sabiranja i množenja matrica.*

Rešenje Asocijativnost operacija $+$ i $\cdot$ sledi iz njihovih definicija i iz asocijativnosti sabiranja i množenja u skupu racionalnih brojeva. Neutralni element za operaciju $+$ je $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ a za $\cdot$ je $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Inverzni element za $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a & a \end{bmatrix}$, s obzirom na operaciju $+$, jeste $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & -a \end{bmatrix}$, a s obzirom na operaciju $\cdot$ jeste $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$.

Zadatak 5.57 *Dokazati da je* $(A, \cdot)$ *grupa gde je:*
$A = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} | a \in \mathbb{R} \land b \in \mathbb{R}\right\} \backslash \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$, *a operacija* $\cdot$ *je množenje matrica.*

Rešenje Dokazati da je $(A,\cdot)$ izomorfan sa grupom $(\mathbb{C}\backslash\{0\},\cdot)$. Funkcija $f(a+ib)=\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ očigledno je bijekcija skupova A i $C\backslash\{0\}$, a homomorfnost funkcije f sledi iz

$$f((a+ib)\cdot(c+id)) = f((ac-bd)+i(ad+bc)) =$$

$$= \begin{bmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -(ad + bc) & ac - bd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} =$$

$= f(a+ib)\cdot f(c+id)$. Prema tome, na osnovu teoreme 5.25 $(A,\cdot)$ jeste grupa.

Zadatak 5.58 *Dokazati da je* $\left(\left\{\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} | x \in \mathbb{R}\right\},\cdot\right)$ *grupa, gde je* $\cdot$ *operacija množenja matrica.*

Zadatak 5.59 *Mogu li u grupi postojati tačno dva elementa x, različita od neutralnog elementa e, za koje je $x^2=e$?*

Rešenje Ne postoje. Dokaz se izvodi kontradikcijom. Pretpostavi li se suprotno, tj. da postoje tačno dva elementa, p i q, različita od e, za koje je $p^2=e$, $q^2=e$ i $p\neq q$. Sada sledi $(pqp)^2=pqppqp=pqeqp=pqqp=pep=pp=e$. Pokazati da je pqp različito i od e i od p. To sledi iz $pqp=e \Rightarrow pq=p \Rightarrow q=e$, kao i iz $pqp=p \Rightarrow pq=e \Rightarrow p=q$. Znači mora biti $pqp=q$, tj. $(pq)^2=e$. Međutim, $pq\neq p$ jer bi u protivnom bilo $q=e$, takođe je i $pq\neq q$ jer bi u protivnom bilo da je $p=e$, najzad $pq\neq e$ jer bi u protivnom bilo $p=q$. Tako se dobija i treći element grupe pq (različit i od p i od q i od e) za koji je $(pq)^2=e$, što je suprotno pretpostavci da postoje tačno dva elementa čiji je kvadrat e.

Zadatak 5.60 *Ispitati da li su* $(A,+)$, $(A,\cdot)$, $(A\backslash\{C_0\},\cdot)$, $(B,+)$, $(B,\cdot)$, $(B\backslash\{C_0\},\cdot)$ *grupe, gde su* $A=\{C_0,C_1,C_2\}$, $B=\{C_0,C_1,C_2,C_3\}$ *skupovi klasa ekvivalencije (faktor skupovi) po modulu* 3 *odnosno* 4 (2.16), a + *i* $\cdot$ *definisani sa* $C_x+C_y=C_{x+y}$ *i* $C_x\cdot C_y=C_{xy}$, *za sve cele brojeve iz skupa* $\mathbb{Z}$.

Rešenje Zbog zadataka 2.16 i 5.31 i teoreme 5.32, $+$ i $\cdot$ binarne su operacije u skupovima A i B. Znači, $(A,+)$, $(A,\cdot)$, $(B,+)$, $(B,\cdot)$ jesu grupoidi, a $(A\backslash\{C_0\},\cdot)$ odnosno $(\{C_1,C_2\},\cdot)$ takođe grupoid jer je $C_x\cdot C_y\neq C_0$ za $x,y\in\{1,2\}$. Međutim, $(\{C_1,C_2,C_3\},\cdot)$ nije grupoid jer je $C_2\cdot C_2=C_4=C_0$.

Asocijativnost i komutativnost ovih binarnih operacija slede iz njihovih definicija i asocijativnosti i komutativnosti u skupu celih brojeva $\mathbb{Z}$. Odnosno, $(C_x+C_y)+C_z=C_{x+y}+C_z=C_{(x+y)+z}=C_{x+(y+z)}=C_x+C_{y+z}=C_x+(C_y+C_z)$. Analogno se ispituju asocijativnost operacije $\cdot$ i komutativnost obeju operacija.

Neutralni element za operaciju $+$ očigledno je C_0 a za $\cdot$ je C_1.

Svi prethodni parovi koji su grupoidi jesu i komutativne polugrupe s neutralnim elementom. Inverzni element za C_x, s obzirom na operaciju $+$, očigledno je C_{-x}. Znači, $(A,+)$ i $(B,+)$ jesu Abelove grupe, dok $(A,\cdot)$ i $(B,\cdot)$ nisu grupe jer ne postoji inverzni element za C_0. $(\{C_1,C_2\},\cdot)$ jeste grupa jer inverzni za C_1 je C_1 a inverzni za C_2 je C_2. Skupovi A i B obeležavaju se sa $\mathbb{Z}_3$ odnosno $\mathbb{Z}_4$, a njihovi elementi C_0, C_1, C_2, C_3 obeležavaju se, zbog kratkoće, sa 0, 1, 2, 3. Tada su Kejlijeve tablice ovih struktura sledeće:

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

$\cdot$	1	2
1	1	2
2	2	1

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\cdot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$\cdot$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	0	2
3	3	2	1

Zadatak 5.61 *Ispitati da li je* $(\{1,3,5,7\},\cdot)$ *Abelova grupa, gde je operacija* $\cdot$ *množenje po modulu 8.*

Zadatak 5.62 *Neka su* A, B *i* C *tačke ravni* α *koje su temena jednakostraničnog trougla* ABC, *čije je težište u tački* T. *Dalje, neka su* ρ, ρ_1 *i* ρ_2 *rotacije ravni* α *oko tačke* T *redom za uglove* 0^0, 120^0 *i* 240^0 *i neka su* σ_1, σ_2 *i* σ_3 *osne simetrije ravni* α *čije su ose redom simetrale duži* BC, AC *i* AB. *Dokazati da je* $(\{\rho,\rho_1,\rho_2,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\},\circ)$ *neciklička i nekomutativna grupa reda 6, gde je* $\circ$ *operacija kompozicije funkcija.*

Rešenje Kejlijeva tablica operacije $\circ$ u tom skupu glasi:

$\circ$	ρ	ρ_1	ρ_2	σ_1	σ_2	σ_3
ρ	ρ	ρ_1	ρ_2	σ_1	σ_2	σ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ	σ_3	σ_1	σ_2
ρ_2	ρ_2	ρ	ρ_1	σ_2	σ_3	σ_1
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	ρ	ρ_1	ρ_2
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	ρ_2	ρ	ρ_1
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	ρ_1	ρ_2	ρ

Kako je kompozicija funkcija asocijativna, to se ispitivanjem, kao u zadatku 5.51, dobija da ova struktura jeste neciklička i nekomutativna grupa. Sve netrivijalne podgrupe ove grupe su: $(\{\rho, \rho_1, \rho_2\}, \circ)$, $(\{\rho, \sigma_1\}, \circ)$, $(\{\rho, \sigma_2\}, \circ)$ i $(\{\rho, \sigma_3\}, \circ)$.

Ova grupa je zapravo grupa *svih* transformacija podudarnosti ravni α koje trougao ABC preslikavaju u samog sebe, i zove se diedarska grupa transformacija jednakostraničnog trougla. Postoje diedarske grupe transformacija od $2n$ elemenata pravilnog n-tougla za svaki prirodan broj n veći od 1. Ovde je korišćena teorema da je svaka transformacija podudarnosti u ravni jednoznačno određena sa tri para odgovarajućih nekolinearnih tačaka.

Ako se temena A, B, C trougla ABC označe sa $A = 1$, $B = 2$ i $C = 3$, tada su permutacije e, a, b, c, d, h u sledećem zadatku permutacije temena toga trougla i zbog toga predstavljaju redom rotacije za 0°, 120°, 240°, a zatim osne simetrije u odnosu na ose koje prolaze redom kroz temena 1, 2 i 3 i preslikavaju taj trougao u samog sebe.

Ovde je korišćena teorema da je svaka transformacija podudarnosti u ravni jednoznačno određena s tri para odgovarajućih nekolinearnih tačaka. Na primer, $\binom{123}{132}$ je osna simetrija u odnosu na visinu trougla koja polazi iz temena 1.

Zadatak 5.63 *Neka su* $e=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$, $a=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$, $c=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$, $d=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$, $h=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$ *(sve?) permutacije skupa* $\{1,2,3\}$. *Dokazati da je* $(\{e,a,b,c,d,h\},\circ)$ *grupa, gde je* $\circ$ *operacija kompozicije funkcija. Da li je grupa komutativna, da li je ciklična i da li je izomorfna grupi iz prethodnog zadatka?*

Rešenje Ispisivanjem Kejlijeve tablice operacije $\circ$ u ovom primeru dobija se da je ova struktura izomorfna grupi iz prethodnog zadatka, jer je jedan izomorfizam funkcija

$$\psi = \begin{pmatrix} e & a & b & c & d & h \\ \rho & \rho_1 & \rho_2 & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

Prema tome, i ova struktura je nekomutativna i neciklička grupa.

Dakle, u proučavanju geometrijskih transformacija podudarnosti mogu se koristiti grupe permutacija.

Grupe iz zadataka 5.55 a), 5.62, 5.63, 5.28, i 7.45. međusobno su izomorfne.

Zadatak 5.64 *Ispitati aksiome Abelove grupe za strukture* $\Big(\mathcal{P}(A), \cup\Big)$, $\Big(\mathcal{P}(A), \cap\Big)$, $\Big(\mathcal{P}(A), \oplus\Big)$ *i* $\Big(\mathcal{P}(A), \setminus\Big)$.

Poglavlje 6

PRSTENI I POLJA

Prsteni i polja su algebarske strukture sa dve binarne operacije, od kojih će se jedna označavati aditivno sa $+$, a druga multiplikativno sa $\cdot$. U svakom prstenu (prstenskim izrazima) podrazumeva se da multiplikativna operacija ima prednost u odnosu na aditivnu operaciju, što će smanjiti broj neophodnih zagrada. Umesto $a \cdot b$ nekad će se pisati samo ab.

Definicija 6.1 *Ako je R neprazan skup, tada je uređena trojka $(R, +, \cdot)$ prsten ako važe sledeća tri aksioma:*

a) $(R, +)$ je Abelova grupa (definicija 5.5),

b) $(R, \cdot)$ je polugrupa (definicija 5.4),

c) $(\forall x, y, z \in R) \quad x(y + z) = xy + xz \ \wedge \ (y + z)x = yx + zx.$

Aksiom c) naziva se distributivni zakon. Kao što je rečeno, Abelova grupa je označena u aditivnoj notaciji, tj. operacija je označena sa $+$, neutralni element sa 0, inverzni za $x \in R$ sa $-x$ i $\underbrace{a + a + \ldots + a}_{n} = na$ za svako $a \in R$.

Odnosno, na se definiše rekurzivno za svako $n \in \mathbb{N}$ i $a \in R$ sa: $1a = a$; $(n+1)a = na + a$. Kako je $(R, +)$ grupa, to se ova definicija može proširiti na sve cele brojeve, odnosno $0a = 0$ i $(-n)a = n(-a)$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Sada se dobija

$$-(na) \stackrel{def}{=} -(a + a + \ldots + a) \stackrel{5.14}{=}$$

$$\stackrel{5.14}{=} (-a) + (-a) + \ldots + (-a) \stackrel{def}{=} n(-a) \stackrel{def}{=} (-n)a.$$

Zbog toga će se $-(na)$ označavati samo sa $-na$, odnosno

$$(-n)a = n(-a) = -na.$$

Primer prstena je $(\{0\}, +, \cdot)$ gde su $+$ i $\cdot$ definisani sa $0+0 = 0$ i $0 \cdot 0 = 0$. Ovaj jednoelementni prsten biće nazvan nula prsten. Sledeći primer se dobija iz zadatka 5.60, odnosno $(\{C_0, C_1, C_2, C_3\}, +, \cdot)$ jeste prsten. Primer prstena koji nije konačan je $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ itd.

Definicija 6.2 *Prsten $(R, +, \cdot)$ je*

a) prsten sa jedinicom ako postoji neutralni element e multiplikativne operacije, 3

b) komutativan prsten ako je operacija $\cdot$ komutativna, 5

c) domen integriteta ako je komutativan prsten s jedinicom $e \neq 0$ u kome važi da je Ø

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \lor b = 0, \quad \textit{tj. ne postoje delitelji nule,}$$ 4

d) polje ako je $(R \backslash \{0\}, \cdot)$ komutativna grupa.

Teorema 6.3 *U prstenu $(R, +, \cdot)$ važi:*

a) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0,$

b) $(-a)b = a(-b) = -(ab),$

c) $(-a)(-b) = ab,$

za sve elemente a i b koji pripadaju prstenu $(R, +, \cdot)$.

Dokaz

a) $a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0 + (a \cdot 0 - (a \cdot 0)) = (a \cdot 0 + a \cdot 0) - (a \cdot 0) = a \cdot (0 + 0) - (a \cdot 0) = a \cdot 0 - (a \cdot 0) = 0$.
U dokazu su redom korišćene aksiome: neutralni element za operaciju $+$, inverzni element u odnosu na $+$, asocijativnost operacije $+$, distributivnost, neutralni element operacije $+$ i inverzni element operacije $+$. Analogno se dokazuje i $0 \cdot a = 0$.

b) $(-a)b = (-a)b + 0 = (-a)b + (ab - (ab)) = ((-a)b + ab)) - (ab) = (-a + a)b - (ab) = 0 \cdot b - (ab) = 0 - (ab) = -(ab)$.
Korišćeno je redom: neutralni element operacije $+$, inverzni element operacije $+$, asocijativnost operacije $+$, distributivnost, inverzni element operacije $+$, dokazano pod a i neutralni element operacije $+$. Analogno se pokazuje i $a \cdot (-b) = -(ab)$.

c) Korišćenjem dokazanog pod b i teoreme 5.13 dobija se

$$(-a)(-b) = -(a(-b)) = -(-(ab)) = ab. \qquad \square$$

S obzirom na ovu teoremu opravdano je $-(ab)$ označiti sa $-ab$.

Teorema 6.4 *U prstenu sa jedinicom $(R, +, \cdot)$ sa bar dva elementa, jedinica prstena je različita od nule prstena.*

Dokaz Dokaz se izvodi kontradikcijom. Pretpostaviće se da je $e = 0$. Tada za proizvoljni element a iz prstena R važi $a = a \cdot e = a \cdot 0 = 0$, što znači da je $R = \{0\}$. Kontradikcija. $\square$

Teorema 6.5 *Svako polje $(R, +, \cdot)$ je domen integriteta.*

Dokaz Treba samo pokazati da ne postoje delitelji nule, tj. ako su a i b različiti od nule, onda je i ab različito od nule. To je očevidno jer su tada a i b iz $R \backslash \{0\}$, pa je i ab iz $R \backslash \{0\}$, jer je $(R \backslash \{0\}, \cdot)$, komutativna grupa. $\square$

Teorema 6.6 *Svaki konačan domen integriteta $(R, +, \cdot)$ je polje.*

Dokaz Neka je $R = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ skup od n elemenata u kojem su svaka dva različita, i neka su $a \in R$ i $a \neq 0$. Dokazaće se da postoji inverzni element za elemenat a, što će onda značiti da je $(R, +, \cdot)$ polje. Formirati skup $S = \{aa_1, aa_2, \ldots, aa_n\} \subseteq R$ i dokazati da skup S ima n elemenata, tj. da je $aa_i \neq aa_j$ za $i \neq j$. Dokaz se izvodi kontradikcijom. Pretpostavimo da je $aa_i = aa_j \ \wedge \ i \neq j$. Tada je $aa_j = aa_i \Rightarrow aa_j - aa_i = 0 \Rightarrow a(a_j - a_i) = 0 \Rightarrow a_j - a_i = 0$ jer su $a \neq 0$ i R bez delitelja nule. To je kontradikcija jer se dobilo da je $a_i = a_j \ \wedge \ i \neq j$, a u skupu $R = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ svaka dva su različita. Kako su R i S konačni skupovi, $S \subseteq R$ i $Card(S) = Card(R)$, sledi da je $S = R$. Pošto u domenu integriteta R postoji jedinica i kako je $S = R$, to je za neko $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $aa_k = e$, to jest postoji inverzni za $a \neq 0$ odnosno $a^{-1} = a_k$. $\square$

UVEK PRSTEN

Teorema 6.7 *Uređena trojka* $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ *je polje ako i samo ako je* n *prost broj, gde je* $\mathbb{Z}_n$ *faktor skup u odnosu na relaciju* $\equiv_n$ *(kongruencija po modulu* n 5.31), *a operacije* $+$ *i* $\cdot$ *definisane kao u* 5.32.

Dokaz Kako je $\mathbb{Z}_1 = \{\mathbb{Z}\} = \{C_0\}$ jednočlan skup, to $(\mathbb{Z}_1, +, \cdot)$ nije polje, jer svako polje ima bar dva elementa, a 1 nije prost broj, pa je teorema tačna za $n = 1$. Na osnovu 5.31, 5.32 i 5.60 sledi da su $(\mathbb{Z}_n, +)$ komutativna grupa i $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ komutativna polugrupa sa jedinicom. Kako je i

$$C_x(C_y + C_z) = C_x C_{y+z} = C_{x(y+z)} = C_{xy+xz} = C_x C_y + C_x C_z$$

to je $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ komutativni prsten sa jedinicom. Neka je sada n prirodan broj veći od 1. Jasno je da će $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ biti domen integriteta akko u $\mathbb{Z}_n$ ne postoje delitelji nule. Kako je $\mathbb{Z}_n$ konačan skup, to zbog teoreme 6.6 sledi da će $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ biti polje akko u $\mathbb{Z}_n$ ne postoje delitelji nule. Znači, dokaz se svodi samo na to da treba dokazati da $\mathbb{Z}_n$ za $n \geq 2$ nema delitelje nule akko je n prost broj.

($\Leftarrow$) Neka je n prost i dokazati da $\mathbb{Z}_n$ nema delitelja nule. Tada je $C_x \cdot C_y = 0 \Rightarrow C_{xy} = 0 \Rightarrow n | xy$, a odavde, samo zbog činjenice da je n prost broj, sledi $n|x$ ili $n|y$, tj. $C_x = 0$ ili $C_y = 0$ (primetiti da $6|3 \cdot 4$, ali to ne implicira da $6|3$ ili $6|4$).

($\Rightarrow$) Neka sada $\mathbb{Z}_n (n \geq 2)$ nema delitelje nule i pokazati da je $n (n \geq 2)$ prost broj. Dokaz se izvodi kontradikcijom. Pretpostavi li se suprotno, tj. da je n složen broj, što znači da $(\exists k, l \in \mathbb{N})(kl = n \wedge k < n \wedge l < n)$. Na osnovu toga stoji da iz $0 = C_n = C_k \cdot C_l$ sledi $C_k = 0$ ili $C_l = 0$ jer $\mathbb{Z}_n$ nema delitelja nule, a odavde dalje sledi $n|k$ ili $n|l$, što znači da je $n \leq k$ ili $n \leq l$. To je kontradikcija s pretpostavkom $(\exists k, l \in \mathbb{N})(kl = n \wedge k < n \wedge l < n)$. $\square$

U literaturi polje $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$, gde je p prost broj, označava se sa $GF(p)$ i čita „polje Galoa od p elemenata".

Definicija 6.8 *Neka je $(F, +, \cdot)$ proizvoljno polje sa jedinicom e. Ako ne postoji takav prirodan broj n da je $ne = \underbrace{e + e + \ldots + e}_{n} = 0$, tada se kaže da je polje F karakteristike nula (ili beskonačne karakteristike). Ako takav n postoji, tada je najmanji prirodni broj k takve osobine $ke = 0$, karakteristika polja F.*

Teorema 6.9 *Karakteristika konačnog polja F je prost broj.*

Dokaz Kako je F konačno polje, to postoji prirodan broj p koji je njegova karakteristika (dokazano u teoremi 5.38, ali u multiplikativnoj notaciji). Jasno je da je $p \neq 1$ jer bi bilo da je $1e = e = 0$, što je nemoguće zbog teoreme 6.4. Dokazati kontradikcijom da je p prost broj. Pretpostavimo suprotno, tj. da je p složen broj, odnosno da postoje prirodni brojevi n i k takvi da je $p = nk \wedge n < p \wedge k < p$. Sada izlazi

$$pe = (nk)e = \underbrace{e + \ldots + e}_{nk} = (\underbrace{e + \ldots + e}_{n})(\underbrace{e + \ldots + e}_{k}) = (ne)(ke) = 0,$$

odakle je $ne = 0$ ili $ke = 0$, jer je F domen integriteta, što znači da p nije karakteristika. Kontradikcija. □

Zadatak 6.10 *Evo nekoliko bitnih formula koje važe u proizvoljnom komutativnom prstenu $(R, +, \cdot)$ za bilo koje elemente a, b i c iz R i svaki prirodni broj n:*

a) Binomna formula, specijalni slučaj polinomne formule.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k =$$

$$= a^n + na^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-2} a^2 b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n,$$

b) Za $n > 1$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

c)

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \ldots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n}),$$

d)

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc),$$

e)

$$2(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) = (a + b + c)((a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2),$$

f)

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

g) Polinomna formula, uopštenje binomne formule.

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^k = \sum_{\substack{k_1 + \ldots + k_n = k \\ k_1 \geq 0, \ldots, k_n \geq 0}} \frac{k!}{k_1! k_2! \ldots k_n!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$$

Dokazi ovih formula izvode se jednostavno indukcijom po n, korišćenjem zakona distributivnosti i, u slučaju pod a), poznate veze binomnih koeficijenata:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Definicija 6.11 *Funkcija $f : R_1 \to R_2$ je homomorfizam prstena (polja) $(R_1, +, \cdot)$ i $(R_2, +, \cdot)$ ako su*

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$
$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

za sve x i y iz skupa R_1.

Operacije prstena R_1 obeležene su istim simbolima kao i operacije prstena R_2 iako to nisu iste operacije. Međutim, to je uobičajeno, jer kao što će se videti, to neće stvarati zabunu. Bijektivni homomorfizam naziva se izomorfizam, a sirjektivni homomorfizam – epimorfizam.

Analogno definiciji 5.16, podgrupoida odnosno podgrupe, definiše se i potprsten.

Definicija 6.12 *Potprsten prstena $(R, +, \cdot)$ jeste prsten $(S, +, \cdot)$ ako je S podskup od R i operacije iz $(S, +, \cdot)$ restrikcije operacija iz $(R, +, \cdot)$.*

Neprazan podskup S prstena $(R, +, \cdot)$ biće potprsten toga prstena ako za sve $x, y \in S$ sledi $x + y$, $xy \in S$ i S je prsten u odnosu na te operacije.

Prsten $(\{3k | k \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$ je potprsten prstena $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Definicija 6.13 *Neprazan podskup S prstena $(R, +, \cdot)$ ideal je toga prstena ako je S potprsten prstena R i za sve $r \in R$ i $s \in S$ važi da su $rs \in S$ i $sr \in S$.*

Na primer, u prstenu celih brojeva $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ skup svih parnih brojeva (pozitivnih, negativnih i nule) ideal je prstena $\mathbb{Z}$.

Definicija 6.14 *Ideal S komutativnog prstena R glavni je ideal ako postoji takav $a \in R$ da je presek svih ideala koji sadrže a jednak idealu S, označava se sa (a) i kaže da je (a) ideal generisan elementom a.*

Drugim rečima, (a) je najmanji ideal koji sadrži a, tada je očevidno da je $(a) = \{ra + na | r \in R \land n \in \mathbb{Z}\}$ ili ako je R komutativan prsten sa jedinicom, tada je $(a) = \{ra | r \in R\}$. Ideal (a) naziva se ideal generisan elementom a. Na primer, ideal parnih brojeva (2) u prstenu celih brojeva glavni je ideal. U prstenu celih parnih brojeva $\mathcal{P}$, ideal generisan elementom 4 je $(4) = \{4m + n4 | m \in \mathcal{P} \land n \in \mathbb{Z}\}$.

Lako se pokazuje da u prstenu $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ važi teorema $nk = n \cdot k$ za sve cele brojeve, n i k.

Zadatak 6.15 *Ispitati koje od sledećih uređenih trojki* $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\{3k | k \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *jesu*

a) *prsteni* b) *domeni integriteta* c) *polja*

Zadatak 6.16 *Dokazati da je* $\left(\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a & a \end{bmatrix} \middle| a \in \mathbb{Q}\right\}, +, \cdot\right)$ *polje gde su* $+$ *i* $\cdot$ *operacije sabiranja i množenja matrice.*

Rešenje Dokaz sledi iz zadatka 5.56 i iz distributivnosti množenja matrice u odnosu na sabiranje matrica.

Zadatak 6.17 *Dokazati da je* $(A, +, \cdot)$ *polje gde je*

$$A = \{a + b\sqrt{2} | a \in \mathbb{Q} \land b \in \mathbb{Q}\}.$$

Uputstvo Pogledati zadatak 5.49 i koristiti distributivnost u skupu realnih brojeva.

Zadatak 6.18 *Dokazati da je* $(\mathbb{Q}, \oplus, \odot)$ *polje gde su* $\oplus$ *i* $\odot$ *definisane sa* $a \oplus b = a + b + 1$ $a \odot b = a + b + ab$.

Rešenje Dokazati prvo da je $(\mathbb{Q}, \oplus)$ Abelova grupa. Asocijativnost grupoida $(\mathbb{Q}, \oplus)$ sledi iz $(a \oplus b) \oplus c = (a+b+1) \oplus c = a+b+1+c+1 = a+(b+c+1)+1 = a \oplus (b+c+1) = a \oplus (b \oplus c)$. Neutralni element je -1, jer $-1 \oplus a = a \oplus -1 = a$ za svako a iz $\mathbb{Q}$, a inverzni za a je $-2-a$, jer $a \oplus (-2-a) = (-2-a) \oplus a = -1$ za svako a iz $\mathbb{Q}$. Komutativnost sledi iz $a \oplus b = a+b+1 = b+a+1 = b \oplus a$, što važi za svako a i b iz $\mathbb{Q}$. Analogno se dokazuje da je $(\mathbb{Q}, \odot)$ komutativna polugrupa sa jedinicom.

Da je $(\mathbb{Q} \backslash \{-1\}, \odot)$ Abelova grupa dokazano je u zadatku 5.45. Dokažimo još distributivnost operacija $\odot$ u odnosu na $\oplus$. Leva distributivnost: $x \odot (y \oplus z) = x \odot (y + z + 1) = x + y + z + 1 + xy + xz + x = x + y + xy + x + z + xz + 1 = (x + y + xy) \oplus (x + z + xz) = (x \odot y) \oplus (x \odot z)$. Analogno se dokazuje i desna distributivnost.

Zadatak 6.19 *Neka su* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *i* $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ *elementi skupa* $\mathbb{R}^3$, *gde je* $\mathbb{R}$ *skup realnih brojeva, i neka su* $+$ *i* $*$ *binarne operacije u skupu* $\mathbb{R}^3$, *a* $\circ : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *i* $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *operacije, koje su definisane kao*

$$\begin{aligned}
&\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3),\\
&\mathbf{a} * \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1),\\
&\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,\\
&\alpha \cdot \mathbf{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3).
\end{aligned}$$

Dokazati da

a) *strukturi* $(\mathbb{R}^3, +, *)$ *nedostaje samo asocijativnost operacije* $*$ *da bi bila nekomutativni prsten bez jedinice,*

b) $\mathbf{a} * \mathbf{b} = -(\mathbf{b} * \mathbf{a})$,

c) $\mathbf{a} \circ (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \circ \mathbf{b} + \mathbf{a} \circ \mathbf{c}$,

d) $(\mathbf{a} * \mathbf{b}) * \mathbf{c} = (\mathbf{a} \circ \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{b} \circ \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}$, *e)* $\boldsymbol{a} * (\boldsymbol{b} * \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$.

Rešenje

a)

Jednostavno se proverava da je $(\mathbb{R}^3, +)$ Abelova grupa i da je $(\mathbb{R}^3, *)$ grupoid. Dokažimo levu distributivnost operacije $*$ u odnosu na $+$. $(a_1, a_2, a_3) * ((b_1, b_2, b_3) + (c_1, c_2, c_3)) =$

$$(a_1, a_2, a_3) * (b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3) =$$

$$(a_2(b_3 + c_3) - a_3(b_2 + c_2), a_3(b_1 + c_1) - a_1(b_3 + c_3), a_1(b_2 + c_2) - a_2(b_1 + c_1)) =$$

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) + (a_2c_3 - a_3c_2, a_3c_1 - a_1c_3, a_1c_2 - a_2c_1) =$$

$$((a_1, a_2, a_3) * (b_1, b_2, b_3)) + ((a_1, a_2, a_3) * (c_1, c_2, c_3)).$$

Analogno se dokazuje i desna distributivnost. Operacija $*$ nije asocijativna jer je, na primer

$((1, 0, 0) * (0, 1, 0)) * (0, 1, 1) = (0, 0, 1) * (0, 1, 1) = (-1, 0, 0)$

dok je

$(1, 0, 0) * ((0, 1, 0) * (0, 1, 1)) = (1, 0, 0) * (1, 0, 0) = (0, 0, 0)$.

Takođe ne važi ni komutativnost operacije $*$ zbog toga što je, na primer $(1, 0, 0) * (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$ dok je $(0, 1, 0) * (1, 0, 0) = (0, 0, -1)$. Nepostojanje neutralnog elementa za operaciju $*$ sledi iz toga što je, na primer $(a_1, a_2, a_3) * (1, 0, 0) = (0, a_3, -a_2)$ i $(1, 0, 0) \neq (0, a_3, -a_2)$ za proizvoljan (a_1, a_2, a_3) iz $\mathbb{R}^3$. Lako se proverava da u strukturi $(\mathbb{R}^3, +, *)$ za svako $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}$ iz $\mathbb{R}^3$ važi:

1) $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{a} = (0, 0, 0)$ 2) $(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}) * \boldsymbol{c} + (\boldsymbol{b} * \boldsymbol{c}) * \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{c} * \boldsymbol{a}) * \boldsymbol{b} = (0, 0, 0)$.

Osobine b), c), d), e) dokazuju se jednostavno proverom po definiciji tih operacija. Na osnovu 12.19, 12.43, 12.49, 12.50, 12.51 i 12.52 sledi da je operacija $+$ izomorfna sabiranju slobodnih vektora, $*$ izomorfna vektorskom proizvodu slobodnih vektora, $\circ$ izomorfna skalarnom proizvodu vektora a operacija $\cdot$ je izomorfna množenju skalara i vektora.

Zadatak 6.20 *Dokazati da strukturi* $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ *nedostaje samo komutativnost operacije* $\cdot$ *da bi bila polje, ako su* $+$ *i* $\cdot$ *definisani sa* $(a_1, a_2, a_3, a_4) \cdot (b_1, b_2, b_3, b_4) = (x, y, z, u)$ *i* $(a_1, a_2, a_3, a_4) + (b_1, b_2, b_3, b_4) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4)$, *gde je*

$$x = a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4, \quad y = a_2b_1 + a_1b_2 + a_3b_4 - a_4b_3,$$

$$z = a_3b_1 + a_1b_3 + a_4b_2 - a_2b_4, \quad u = a_4b_1 + a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2.$$

Rešenje Lako se proverava da $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ jeste prsten. Neutralni element operacije $\cdot$ jeste $(1, 0, 0, 0)$, što se proverava po definiciji operacije $\cdot$, a inverzni element za neki proizvoljni (a_1, a_2, a_3, a_4) iz $\mathbb{R}^4$ koji je različit od elementa $(0, 0, 0, 0)$, s obzirom na operaciju $\cdot$ jeste element $(pa_1, -pa_2, -pa_3, -pa_4)$, gde je $p = \frac{1}{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2}$. Na osnovu teoreme 5.24 sledi da je uređen par $(\mathbb{R}^4 \backslash \{(0,0,0,0\}, \cdot)$ grupa, odnosno strukturi $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ nedostaje samo komutativnost operacije $\cdot$ da bi bila polje. Nekomutativnost operacije $\cdot$ sledi, na primer, iz $(0,1,0,0) \cdot (0,0,1,0) = (0,0,0,1)$ i $(0,0,1,0) \cdot (0,1,0,0) = (0,0,0,-1)$. Ovakve strukture nazivaju se **tela**, a ova konkretna struktura **telo kvaterniona.**

Zadatak 6.21 *Neka je u prstenu $(R, +, \cdot)$ e jedinica prstena, a za $x \in R$ važi $x^{1994} = 0$. Dokazati da postoje inverzni elementi za $e - x^2$ i $e + x$ s obzirom na multiplikativnu operaciju prstena R i pronaći ih.*

Rešenje Na osnovu uslova zadatka i 6.10 sledi da je

$$x^{1994} = 0 \Rightarrow e - x^{1994} = e \Leftrightarrow e^{1994} - x^{1994} = e \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^2)^{997} - (x^2)^{997} = e \Leftrightarrow (e - x^2)(e + x^2 + x^4 + \ldots + x^{1992}) = e \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e - x^2)^{-1} = e + x^2 + x^4 + \ldots + x^{1992}.$$

Slično se dobija da $x^{1994} = 0 \Rightarrow x^{1995} = 0 \Leftrightarrow e^{1995} + x^{1995} = e \Leftrightarrow$ $(e + x)(e - x + x^2 - \ldots + x^{1994}) = e \Leftrightarrow (e + x)^{-1} = e - x + x^2 - \ldots + x^{1994}.$

Poglavlje 7

KOMPLEKSNI BROJEVI

Prvi deo teksta koji sledi predstavljen manjim fontom može se razumeti tek posle čitanja sledećeg poglavlja o polinomima.

Faktor struktura $(\mathbb{R}[t]/_{(t^2+1)}, +, \cdot)$ jeste polje jer $t^2 + 1$ nesvodljiv je polinom nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$ (teorema 9.9). Ovo polje naziva se polje kompleksnih brojeva i obeležava se sa $\mathbb{C}$. Kako je dogovoreno da se za predstavnika klase uzima polinom najmanjeg stepena, to će faktički značiti da će elementi skupa $\mathbb{R}[t]/(t^2+1)$ biti klase $[a+bt]$ koje će se označavati samo sa $a+bt$, pa su elementi našeg polja, u stvari, polinomi stepena ne većeg od 1 (linearni i konstantni), čiji su koeficijenti realni brojevi. Sada je lako videti da je $(a+bt)+(c+dt) = a+c+(b+d)t$ i $(a+bt)(c+dt) = ac+adt+bct+bdt^2 = (ac-bd)+(ad+bc)t+bdt^2+bd = (ac-bd)+(ad+bc)t+bd(t^2+1) = ac-bd+(ad+bc)t$, jer je $[bd(t^2+1)] = [t^2+1] = 0$. Iz tradicionalnih razloga umesto t pisaće se i, pa će $a+bi$ predstavljati kompleksan broj, gde su a i b realni brojevi. Prilikom rada s kompleksnim brojevima $a+ib$ tehnika je ista kao da se operiše sa realnim binomom $a+ib$, s tim što se stalno primenjuje da je $i^2+1=0$ odnosno $i^2=-1$.

Teorema 7.1 *Uređena trojka* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *je polje, gde su operacije* $+$ *i* $\cdot$ *definisane sa*

$$(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d) \;\; i \;\; (a,b)(c,d) = (ac-bd, ad+bc).$$

Ovo polje naziva se polje kompleksnih brojeva i označavamo ga sa $\mathbb{C}$.

NAPOMENA: Polja $(\mathbb{R}[t]/_{(t^2+1)}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ nisu jednaka, već izomorfna, ali je uobičajeno da se i za jedno i za drugo kaže da su polje kompleksnih brojeva i označava se sa $\mathbb{C}$.

Dokaz Dokazaće se samo zatvorenost binarne operacije $\cdot$ u skupu $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ i postojanje inverznih elemenata s obzirom na neutralni element $(1,0)$ u strukturi $(\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}, \cdot)$, jer se ostali aksiomi jednostavno proveravaju. Uređen par $(\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}, \cdot)$ jeste grupoid jer je $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ grupoid i očevidno važi

$$(a,b) \neq (0,0) \;\wedge\; (c,d) \neq (0,0) \;\Leftrightarrow\; a^2+b^2 \neq 0 \;\wedge\; c^2+d^2 \neq 0 \;\Rightarrow$$

$$a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2 \neq 0 \Leftrightarrow (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (ac - bd, ad + bc) \neq (0, 0).$$

Ako je (x, y) inverzni za (a, b), tada je $(a, b)(x, y) = (1, 0) \Leftrightarrow ax - by = 1 \wedge ay + bx = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$. □

Ako se uvedu oznake $(a, 0) = a$ i $(0, 1) = i$, tada je $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$ i $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + (0, 1)(b, 0) = a + ib$.

Činjenica 7.2

Za definiciju elemenata skupa kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ može se reći da su izrazi oblika $a + ib$ s kojima se računa isto kao s realnim binomom $a + ib$, gde su $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ i $i^2 = -1$, to jest ako je

$\mathbb{C} = \{a + ib | a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1\}$ tada je $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ polje.

Treba primetiti da je $(a+ib)(c+id) = ac-bd+i\Big((a+b)(c+d)-ac-bd\Big)$, što znači da se množenje dva kompleksna broja može realizovati samo sa TRI množenja realnih brojeva. U definiciji $(a+ib)\cdot(c+id) = ac-bd+i(ad+bc)$ ima ČETIRI množenja realnih brojeva! Ovo je vrlo značajno zbog smanjenja računarskog vremena!

Veoma je pogrešno definisati $i = \sqrt{-1}$ jer nije još ni definisano šta je $\sqrt{\ }$ u polju kompleksnih brojeva. Iz definicije kompleksnog n–tog korena $\sqrt[n]{\ }$, koja sledi u daljem tekstu, vidi se da je $\sqrt[n]{z}$ u polju $\mathbb{C}$ promenljiva koja uzima vrednosti iz skupa od n elemenata, tj. $\sqrt[n]{z}$ u $\mathbb{C}$ ima n različitih rešenja za svaki kompleksni broj z različit od nule, pa će po toj definiciji slediti da je $\sqrt{-1} \in \{i, -i\}$ tj. $\sqrt{-1} = \pm i$, dok u polju realnih brojeva $\mathbb{R}$ $\sqrt[n]{\ }$ jeste funkcija odnosno $\sqrt[n]{x}$ ima najviše jednu vrednost. Definicija $i = \sqrt{-1}$ proizvodi razne apsurde kao što je, na primer, $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = i \cdot i = i^2 = -1$. Otkriti gde je greška!

Teorema 7.3 *Za svaki ceo broj k važi $i^{4k} = 1$; $i^{4k+1} = i$; $i^{4k+2} = -1$; $i^{4k+3} = -i$.*

Dokaz je neposredna posledica činjenice da je $i^2 = -1$.

Do sada su korišćene sledeće oznake za kompleksni broj z : $z = [a + bt] = a + bt = (a, b) = a + bi = a + ib$, gde su a i b proizvoljni realni brojevi.

Od sada će se uzimati oznaka $z = a+ib$ i ovaj oblik nazivaće se algebarski oblik kompleksnog broja.

Definicija 7.4 *Ako je $z = a + ib$ kompleksan broj, tada je $\overline{z} = a - ib$ njemu konjugovani kompleksan broj.*

Drugim rečima, konjugovanje je funkcija f skupa $\mathbb{C}$ u skup $\mathbb{C}$, definisana sa $f(a+ib) = a - ib$ i čija je geometrijska interpretacija u kompleksnoj ravni osna simetrija u odnosu na realnu osu.

Definicija 7.5 *Neka je $z = a + ib$ kompleksan broj. Tada se $Re(z) = a$ naziva realni deo, $Im(z) = b$ imaginarni deo i $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ modul kompleksnog broja z, tj. modul je funkcija $|\ \ |: \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.*

Neposredna posledica 7.2, 7.4 i 7.5 je sledeća teorema.

Teorema 7.6 *Za proizvoljne kompleksne brojeve z, z_1 i z_2 važi:*

a) $Re(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ *e)* $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{\alpha} = \alpha$
b) $Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$ *f)* $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$
c) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$ *g)* $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
d) $Re(z_1 + z_2) = Re(z_1) + Re(z_2)$ *h)* $Im(z_1 + z_2) = Im(z_1) + Im(z_2)$.
i) Četvorougao $O, z_1, z_1 + z_2, z_2$ jeste paralelogram, gde je $O = 0 + 0i$.

Teorema 7.7 *Ako je $z = a + ib$ proizvoljan kompleksni broj, tada je:*

a) $z\overline{z} = |z|^2$ **b)** $z \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = |z|^{-2}\overline{z}$ **c)** $|z| = 1 \Rightarrow z^{-1} = \overline{z}$.

Dokaz

a) $z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2b^2 = a^2 - (-1)b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$,
b) Sledi iz $z\overline{z} = |z|^2$ i $z \neq 0$. **c)** Ako je z jedinični kompleksni broj, tada iz **b)** sledi $z^{-1} = \overline{z}$. □

Definicija 7.8 *Funkcija* $\mathbf{d} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *koja preslikava uređene parove kompleksnih brojeva u nenegativne realne brojeve definisana sa*

$$\mathbf{d}(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

naziva se **rastojanje**. *Odnosno,* $\mathbf{d}(z_1, z_2)$ *zovemo rastojanje kompleksnih brojeva* z_1 *i* z_2.

Lako se proverava da funkcija $\mathbf{d}$ zadovoljava sledeće uslove:

a) $\mathbf{d}(z_1, z_2) \geq 0$, c) $\mathbf{d}(z_1, z_2) = \mathbf{d}(z_2, z_1)$,
b) $\mathbf{d}(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$, d) $\mathbf{d}(z_1, z_2) \leq \mathbf{d}(z_1, z_3) + \mathbf{d}(z_3, z_2)$.

Postoji geometrijska interpretacija kompleksnih brojeva. Poznato je da se može konstruisati bijektivna funkcija između skupa svih uređenih parova čije su komponente realni brojevi, tj. skupa $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) | a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{C}$ i skupa svih tačaka geometrijske (euklidske) ravni.

Uzeće se ona bijekcija koja se dobija fiksiranjem (odabiranjem) jednog Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema. Ta bijekcija je funkcija koja par (kompleksni broj z) $z = a+ib = (a,b) \in \mathbb{C}$ preslikava u tačku z ravni čije su to koordinate. Prva od osa tog koordinatnog sistema nazvaće se realna osa, druga imaginarna osa a cela ravan kompleksna ravan. Sada se sve definicije polja kompleksnih brojeva mogu interpretirati u ovom geometrijskom modelu, odnosno mogu se dati njima ekvivalentne definicije i dokazati njihova ekvivalencija.

Napomenimo da se celokupno proučavanje polja kompleksnih brojeva može sprovesti i bez ove geometrijske interpretacije, ali neki se pojmovi lakše i brže shvataju u geometrijskom modelu, kao što će se videti. Ako je z kompleksni broj, tada će se i tačka koja joj odgovara u kompleksnoj ravni, pomenutom bijekcijom, obeležiti istim simbolom z, a kompleksni broj nula i koordinatni početak obeležavaće se istim simbolom 0.

U tekstu će se pod konveksnim uglom podrazumevati konveksni skup svih tačaka ravni ograničen dvema polupravama sa zajedničkom početnom tačkom, uključujući i tačke tih polupravih, a pod orijentisanim konveksnim uglom podrazumevaće se konveksni ugao u kome se zna koja je poluprava prva a koja druga. Pomenute poluprave nazivaju se kraci ugla. Analogno se definiše i konkavni orijentisani ugao. Orijentisani ugao je pozitivan ako rotacija prvog kraka po oblasti ugla prema drugom kraku jeste u pozitivnom smeru (smer od tačke $(1,0)$ najkraćim putem po jediničnoj centralnoj kružnici do tačke $(0,1)$). Merni broj neorijentisanog ugla je merni broj (dužina) luka jedinične kružnice, koji pripada tome uglu i čiji je centar u temenu toga ugla, a krajnje tačke na kracima ugla. Merni broj neorijentisanog konveksnog ugla je broj iz intervala $[0,\pi]$. Merni broj orijentisanog konveksnog ugla je iz intervala $(-\pi,\pi]$, odnosno ako je konveksni ugao pozitivno orijentisan, merni broj je iz intervala $(0,\pi]$, u suprotnom je iz $(-\pi,0)$.

Činjenica 7.9

Uobičajeno je da kada se kaže ugao, podrazumeva se merni broj konveksnog ugla, orijentisanog ili neorijentisanog, što treba i naznačiti.

Merni broj ugla između dveju neorijentisanih pravih, tj. za koje se ne zna koja je prva a koja druga, jeste iz intervala $[0,\frac{\pi}{2}]$.

Definicija 7.10 *Argument kompleksnog broja z u oznaci* $\arg(z)$ *ili* $\arg z$, *merni je broj konveksnog orijentisanog ugla čiji je prvi krak pozitivna realna* *osa a drugi poluprava* $0z$*, gde je* $0 = 0 + i0$ *kompleksni broj* 0*, tj. koordinatni početak.*

Kako je merni broj konveksno orijentisanog ugla uvek iz intervala $(-\pi, \pi]$, to je i $\arg(z)$ iz intervala $(-\pi, \pi]$, tj. $\arg z \in (-\pi, \pi]$.
Vrlo retko, u nekim udžbenicima uzima se da je $\arg z \in [0, 2\pi)$, što nećemo koristiti.

Činjenica 7.11

Treba primetiti da ako je $z = 0$, tada nije definisana poluprava $0z$, pa onda nije definisan ni argument kompleksnog broja $0 = 0 + i0$.

Ekvivalentna definicija argumenta kompleksnog broja glasi:

Definicija 7.12 *Argument u oznaci* arg *je sirjektivna funkcija koja preslikava skup nenula kompleksnih brojeva u interval realnih brojeva* $(-\pi, \pi]$*, odnosno* $\arg : \mathbb{C}\backslash\{0\} \overset{na}{\rightarrow} (-\pi, \pi]$ *definisana sa:*

$$\arg z = \arg(a + ib) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} & za \quad a > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{b}{a} & za \quad a < 0 \wedge b \geq 0 \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{b}{a} & za \quad a < 0 \wedge b < 0 \\ \frac{\pi}{2} & za \quad a = 0 \wedge b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & za \quad a = 0 \wedge b < 0. \end{cases}$$

Dokaz ekvivalentnosti definicija 7.12 i 7.10 posledica je definicija funkcije arctg, konveksno orijentisanog ugla i mernog broja konveksno orijentisanog ugla, tj. zbog $\arg z \in (-\pi, \pi]$ i $\operatorname{arctg} x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Dalje će se podrazumevati da kada se kaže ugao, to je konveksni ugao.

(Pogledati zadatak 3.53.k))

Argument kompleksnog broja 0 ne definiše se, a argument kompleksnog broja različitog od nule obavezno je broj iz intervala $(-\pi, \pi]$. Na primer, $\arg(7) = 0$, $\arg(3i) = \frac{\pi}{2}$, $\arg(-5) = \pi$, $\arg(-10i) = -\frac{\pi}{2}$, $\arg(2 + 2i) = \frac{\pi}{4}$, $\arg(-4\sqrt{3} - 4i) = -\frac{5\pi}{6}$, $\arg(7\sqrt{3} - 7i) = -\frac{\pi}{6}$ itd.

Teorema 7.13 *Neka je* f *funkcija koja proizvoljni kompleksni broj* z *preslikava u slobodni vektor* $\overrightarrow{Oz}$*, gde je* O *kompleksni broj* $0 = 0 + i0$*. Tada* f *jeste izomorfizam aditivne grupe kompleksnih brojeva* $(\mathbb{C}, +)$ *u odnosu na sabiranje na aditivnu grupu skupa slobodnih vektora u odnosu na sabiranje vektora.*

$f(z) = \overrightarrow{Oz}$, $f(z_1 + z_2) = \overrightarrow{Oz_1} + \overrightarrow{Oz_2} = f(z_1) + f(z_2)$

Drugim rečima, formulacija prethodne teoreme može biti i:
„kompleksni brojevi sabiraju se kao vektori".

Dokaz ove teoreme posledica je tvrdnje da za svaka dva kompleksna broja, z_1 i z_2, četvorougao $0, z_1, z_1 + z_2, z_2$ jeste paralelogram i poznate teoreme o vektorima da je projekcija zbira jednaka zbiru projekcija.

Posledica 7.14 *Kompleksna funkcija $f(z) = w+z$ jeste translacija za vektor w odnosno vektor $\overrightarrow{Ow}$.*

Definicija 7.15 *Funkcija $H_{O,k}$ koja tačku A preslikava u tačku A' tako da je $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$ to jest $H_{O,k}(A) = A'$, naziva se homotetija sa centrom u tački O i koeficijentom $k \in \mathbb{R}$.*

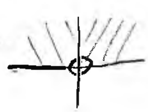
Teorema 7.16 *Ako je $z_1 \neq w$, $z_2 \neq w$, $z_1 \neq 0$ i $z_2 \neq 0$, tada je*

1) $\arg z_1 = \arg z_2 \Leftrightarrow \frac{z_1}{|z_1|} = \frac{z_2}{|z_2|} \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}^+)\overrightarrow{Oz_1} = k\overrightarrow{Oz_2}$
2) $\arg(z_1 - w) = \arg(z_2 - w) \Leftrightarrow \frac{z_1-w}{|z_1-w|} = \frac{z_2-w}{|z_2-w|}$
3) $(\exists k \in \mathbb{R}^+)\overrightarrow{wz_1} = k\overrightarrow{wz_2} \Leftrightarrow \frac{z_1-w}{|z_1-w|} = \frac{z_2-w}{|z_2-w|}$
4) $(\exists k \in \mathbb{R}^+)\overrightarrow{wz_1} = k\overrightarrow{wz_2} \Leftrightarrow \arg(z_1 - w) = \arg(z_2 - w)$
5) *Množenjem kompleksnog broja s realnim pozitivnim brojem argument se ne menja.*
6) *Kompleksni brojevi koji pripadaju istoj polupravoj koja ishodi iz koordinatnog početka imaju jednake argumente.*
7) *Množenje kompleksnog broja z realnim brojem k je $H_{O,k}(z)$, homotetija sa centrom $O(0,0)$ i koeficijentom k.*

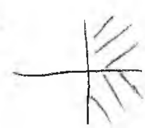
Treba primetiti da prethodnih sedam tvrdnji govore faktički jedno te isto.

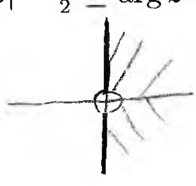
Teorema 7.17 *Po definiciji argumenta* $\arg : \mathbb{C}\setminus\{0\} \overset{na}{\to} (-\pi, \pi]$, *tj.* $(\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}) \arg z \in (-\pi, \pi]$ ($\arg 0$ *nije definisan!) sledi:*

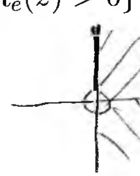
1. $\{z | \arg z > 0\} = \{z | I_m(z) > 0\} \cup \mathbb{R}^-$,
2. $\{z | \arg z \geq 0\} = \{z | I_m(z) \geq 0\} \setminus \{0\}$,
3. $\{z | -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}\} = \{z | R_e(z) > 0\}$,
4. $\{z | -\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}\} = \{z | R_e(z) \geq 0\} \setminus \{0\}$,
5. $\{z | -\frac{\pi}{2} < \arg z \leq \frac{\pi}{2}\} = \{z | R_e(z) > 0\} \cup \{xi | x > 0\}$,
6. $\{z | -\frac{\pi}{2} \leq \arg z < \frac{\pi}{2}\} = \{z | R_e(z) > 0\} \cup \{xi | x < 0\}$.

1.


2.


3.


4.


5.


6.


Evo efikasnog primera za proveru razumevanja definicija argumenta arg, imaginarnog dela I_m i realnog dela R_e. Proveriti koje su od sledećih ekvivalencija i implikacija tačne za svaki kompleksni broj z:

- $\arg z > 0 \Leftrightarrow I_m(z) > 0$
- $\arg z < 0 \Leftarrow I_m(z) \leq 0$
- $\arg z < 0 \Leftrightarrow I_m(z) \leq 0$
- $\arg z > 0 \Leftarrow I_m(z) > 0$
- $\arg z < 0 \Rightarrow I_m(z) \leq 0$
- $\arg z > 0 \Rightarrow I_m(z) > 0$
- $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2} \Rightarrow I_m(z) \in \mathbb{R}$
- $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow R_e(z) > 0$
- $\arg z < 0 \Leftrightarrow I_m(z) < 0$
- $\arg z > 0 \Leftrightarrow I_m(z) > 0$
- $\arg z \geq 0 \Leftrightarrow I_m(z) \geq 0$
- $\arg z \geq 0 \Leftrightarrow \Big(R_e(z) \geq 0 \wedge z \neq 0\Big)$
- $\arg z \geq 0 \Leftrightarrow \Big(I_m(z) \geq 0 \wedge z \neq 0\Big)$
- $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow R_e(z) \geq 0$
- $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow R_e(z) \geq 0$
- $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Big(I_m(z) \in \mathbb{R} \wedge z \neq 0\Big)$
- $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Big(I_m(z) \in \mathbb{R} \wedge z \neq 0\Big)$

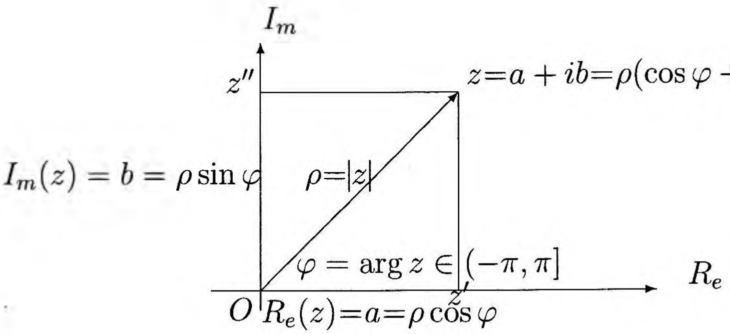
U literaturi se često ovo što nazivamo argument kompleksnog broja, imenuje glavna vrednost argumenta kompleksnog broja, a argument kompleksnog broja z jeste skup koji se označava sa $Arg(z) = \{\arg(z) + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, što se neće koristiti.

Ako se ima u vidu geometrijska interpretacija kompleksnog broja, sledi da je modul kompleksnog broja (tačke) z merni broj duži $0z$, jer je $|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$ i važi Pitagorina teorema.

Teorema 7.18 *Neka je* $\rho = |z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$ *modul kompleksnog broja* z, *a* $\varphi = \arg z \in (-\pi, \pi]$ *argument kompleksnog broja* z. *Tada je* $z = a + ib \Leftrightarrow z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Dokaz U geometrijskom modelu dokaz je trivijalan jer (slika 2) iz trougla Ozz', gde je z' normalna projekcija tačke z na realnu osu, sledi $Oz' = Oz \cdot$

$\cos\varphi \Leftrightarrow a = \rho\cos\varphi$ i $z'z = Oz\cdot\sin\varphi \Leftrightarrow b = \rho\sin\varphi$. Ako bi se dokazivalo direktno po definiciji 7.12, morao bi se dokaz podeliti u pet slučajeva i koristiti trigonometrijske formule $\cos(\text{arctg}\, x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\sin(\text{arctg}\, x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ itd. □



Slika 2

Kraća oznaka za $\cos\varphi + i\sin\varphi$ je $e^{i\varphi}$ ili $\text{cis}\,\varphi$, odnosno

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi} = \text{cis}\,\varphi.$$

Činjenica 7.19 *Kompleksni brojevi su jednaki akko su jednaki njihovi moduli i argumenti, tj.* $re^{i\psi} = \rho e^{i\varphi} \Leftrightarrow r = \rho \wedge \psi = \varphi + 2k\pi \in (-\pi,\pi]$. *Vrlo je korisno dogovoriti se da čim se napiše* $\rho e^{i\varphi}$*, podrazumeva se da je* $\varphi \in (-\pi,\pi]$*, odnosno da je* φ *argument kompleksnog broja* $\rho e^{i\varphi}$.

Definicija 7.20 *Trigonometrijski oblik kompleksnog broja* $z = a + ib$ *je* $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$*, gde je* $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ *i* $\varphi = \arg(z) + 2k\pi$ *za bilo koji ceo broj* k.

Teorema 7.21 $(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos\psi+i\sin\psi) = \cos(\varphi+\psi)+i\sin(\varphi+\psi)$.

Dokaz sledi iz distributivnosti i adicionih formula. □

Kako je $(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos\psi+i\sin\psi) = \cos(\varphi+\psi)+i\sin(\varphi+\psi)$, sledi da se svi izrazi oblika $\cos\varphi+i\sin\varphi$ uvek množe tako što se φ-ovi sabiraju. S druge strane, izrazi oblika $e^{i\varphi}$ takođe se množe tako što se φ-ovi sabiraju. Na osnovu toga sledi da se za izraz $\cos\varphi + i\sin\varphi$ može uvesti kraća oznaka $e^{i\varphi}$ odnosno

$$\cos\varphi + i\sin\varphi \stackrel{def}{=} e^{i\varphi} = \text{cis}\,\varphi$$

pa je tada $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}$. Oblik kompleksnog broja $z = \rho e^{i\varphi}$ zvaćemo eksponencijalni oblik.

Posle proučavanja kompleksnih funkcija desiće se „neverovatna" stvar, odnosno pokazaće se da definicija $\cos\varphi + i\sin\varphi \overset{def}{=} e^{i\varphi}$ je u stvari teorema, gde je $e = 2,718281828459045...$

Posledica prethodne teoreme jeste sledeća teorema:

Teorema 7.22 *Ako je* $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ *i ako je* $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \rho_2 e^{i\varphi_2}$, *tada je*

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)), \ i \qquad \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

Iz teoreme 7.22 sledi da je $|z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$ i

$$\arg(z_1z_2) = \alpha + \arg z_1 + \arg z_2 \ \text{ za neko } \ \alpha \in \{0, -2\pi, 2\pi\},$$

tako da je $\alpha + \arg z_1 + \arg z_2 \in (-\pi, \pi]$, odnosno

$$\arg(z_1z_2) = \begin{cases} \arg z_1 + \arg z_2 & za \quad \arg z_1 + \arg z_2 \in (-\pi,\pi] \\ 2\pi + \arg z_1 + \arg z_2 & za \quad \arg z_1 + \arg z_2 \in (-2\pi,-\pi] \\ -2\pi + \arg z_1 + \arg z_2 & za \quad \arg z_1 + \arg z_2 \in (\pi,2\pi]. \end{cases}$$

Primeri:

1. $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \arg(3+i) + \arg(2+i) = \arg\big((3+i)(2+i)\big) = \arg(5+5i) = \frac{\pi}{4}$,
2. $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$ jer je $(3+i)(5+i)(7+i)(8+i) = 650(1+i)$,
3. $\operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ jer je $(5+i)(7+i)(8+i) = 130(2+i)$.

Iz teoreme 7.22 sledi teorema 7.26. Iz teoreme 7.22 indukcijom se lako pokazuje teorema 7.23.

Teorema 7.23 *Ako je* $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *tada je*

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \quad za\ svako\ n \in \mathbb{N}.$$

Kako je $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-1} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)$ (7.7) i $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^0 = 1$, to prethodna teorema važi za svaki ceo broj n.

Test 7.24 *Zaokružiti brojeve koji su koreni odgovarajućih jednačina:*

$$z \in \{0, 1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\} \Rightarrow z^2 = \bar{z}, \qquad z \in \{0, 1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\} \Rightarrow z^3 = |z|,$$
$$z \in \{0, 1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\} \Rightarrow z^4 = z, \qquad z \in \{0, 1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\} \Rightarrow z^3 = 1.$$

Test 7.25 *Od jednačina* $z^2 = \bar{z}$, $z^3 = |z|$, $z^4 = z$ *i* $z^3 = 1$ *koje su ekvivalentne (zaokružiti slovo ispred tačnog odgovora):*

a) Prva i druga *b) Prva i treća* *c) Prva i četvrta*

d) Druga i treća *e) Druga i četvrta* *f) Treća i četvrta*

Teorema 7.26 *Množenje broja* z *brojem* $\cos\varphi + i\sin\varphi$ *jeste rotacija tačke* z *za ugao* φ *oko koordinatnog početka, tj.* $R_{O,\varphi}(z) = ze^{i\varphi}$.

Treba uočiti da za $\varphi \in (-\pi, \pi]$ važi: $\arg e^{i\varphi} = \varphi$.

Teorema 7.27 *Za konveksno orijentisani ugao* $\varphi = \measuredangle z_1Oz_2$ *važi*

$$\measuredangle z_1Oz_2 = \arg\frac{z_2}{z_1}.$$

Dokaz Neka je $|z_1| = |z_2|$, što ne utiče na opštost dokaza, jer za svaki pozitivni broj ρ važi $\arg z = \arg \rho z$ i $\measuredangle z_1Oz_2 = \measuredangle z_1Oz_2'$, gde je $z_2' = rz_2$ za neki pozitivni broj r (tj. baš za $r = \frac{|z_2'|}{|z_2|}$). Neka je $R_{O,\varphi}$ rotacija u kompleksnoj ravni za ugao $\varphi \in (-\pi, \pi]$ oko kompleksnog broja (koordinatnog početka) O. Tada je $R_{O,\varphi}(z_1) = z_2 = z_1e^{i\varphi} \Leftrightarrow e^{i\varphi} = \frac{z_2}{z_1} \Leftrightarrow \arg e^{i\varphi} = \arg\frac{z_2}{z_1} \Leftrightarrow \varphi = \arg\frac{z_2}{z_1} \Leftrightarrow \measuredangle z_1Oz_2 = \arg\frac{z_2}{z_1}$ (teorema 7.26). $\square$

Teorema 7.28 *Ako je kompleksni broj* z_2 *dobijen rotacijom kompleksnog broja* z_1 *oko broja* w *za ugao* φ, *tada je*

$$z_2 = w + (z_1 - w)e^{i\varphi}.$$

Dokaz je posledica teorema 7.26 i 7.13.

Teorema 7.29 *Za konveksno orijentisani ugao* $\varphi = \measuredangle z_1wz_2$ *važi*

$$\measuredangle z_1wz_2 = \arg\frac{z_2 - w}{z_1 - w}.$$

Dokaz je posledica teorema 7.27 i 7.13.

Na osnovu ovoga sledi da sledeća rečenica jeste jedna od ekvivalentnih definicija pozitivno orijentisanog ugla.

Definicija 7.30
Konveksni ugao $\measuredangle z_1wz_2$ *pozitivno je orijentisan akko je* $\arg\frac{z_2-w}{z_1-w} > 0$.

Teorema 7.31 *Jednačina $z^n = w = \rho e^{i\varphi}$, gde je z nepoznata, n proizvoljan prirodan broj i w proizvoljni kompleksni broj različit od nule, ima n različitih rešenja koja su u kompleksnoj ravni temena pravilnog n-tougla čije je težište u koordinatnom početku, tj. rešenja su*

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}} \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Dokaz Data jednačina $z^n = w$ rešava se uvođenjem smena $z = re^{i\psi}$ i $w = \rho e^{i\varphi}$, gde su r i ψ nepoznate, a ρ i φ dati brojevi, jer je w dati broj. Sada sledi $z^n = w \Leftrightarrow r^n e^{in\psi} = \rho e^{i\varphi} \Leftrightarrow r = \sqrt[n]{\rho} \wedge n\psi = \varphi + 2k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}$. Da se neka rešenja ne bi ponavljala uzima se da je $\psi = \frac{\varphi+2k\pi}{n} \in (-\pi, \pi]$ pa je onda dovoljno da je $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ odnosno

$$z^n = w = \rho e^{i\varphi} \Leftrightarrow z \in \left\{ \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}} \mid k = 0, \ldots, n-1 \right\} = S.$$

Znači, $z_k = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$ su rešenja jednačine $z^n = w$ za svako $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Pokazati da su svaka dva z_k iz S različita, tj. da ih ima bar n. Ako je $k_1 \neq k_2$, tada je $z_{k_1} \neq z_{k_2}$ jer je

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\varphi}{n}} \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\varphi}{n}} \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^{k-1} e^{i\frac{2\pi}{n}} = z_{k-1}\, e^{i\frac{2\pi}{n}}$$

tj. $z_k = z_{k-1}\, e^{i\frac{2\pi}{n}}$, što znači da je z_k dobijen rotacijom broja z_{k-1} oko koordinatnog početka za ugao $\frac{2\pi}{n}$, pa sledi da su $z_0, z_1, \ldots z_{n-1}$ na istoj centralnoj kružnici poluprečnika $\sqrt[n]{\rho}$ i svaki od njih dobija se od prethodnog, rotacijom za ugao $\frac{2\pi}{n}$, jer množenje sa $e^{i\theta}$ je rotacija za ugao θ oko koordinatnog početka, a pun ugao iznosi 2π, pa se nijedan od $z_0, z_1, \ldots z_{n-1}$ neće poklapati. Znači pronašli smo bar n rešenja. Međutim, ako se primeni i teorema 8.39, koja kaže da svaki polinom n-tog stepena ima najviše n korena, sledi da data jednačina ima tačno n korena. $\square$

Ako je $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, tada očevidno za svaki element z skupa $S = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}\}$ važi $z^n - 1 = 0$ i svaka dva elementa iz S različita su, tj. jednačina $z^n - 1 = 0$ ima bar n rešenja. Međutim, na osnovu teoreme 8.39 sledi da nema više od n rešenja pa je

$$z^n - 1 = 0 \Leftrightarrow z \in \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}\} \quad \text{gde je } \varepsilon = e^{i\frac{2\pi}{n}}.$$

Može se primetiti da je $(S, \cdot)$ ciklička grupa reda n izomorfna grupi $(\mathbb{Z}_n, +)$. Generatorni elementi grupe $(\{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}\}, \cdot)$ nazivaju se primitivni koreni jednačine $z^n - 1 = 0$. Jedan primitivni koren jednačine $z^n - 1 = 0$ jeste ε.

Da li je $x = 1$ rešenje jednačine $\sqrt[4]{2x-3} = \sqrt[4]{x-2}$, gde je $\sqrt[4]{\ }$ kompleksni koren? Da li to jeste jednačina? Ako jeste jednačina, da li ima rešenja? Ako jeste jednačina, koliko ima rešenja?

Definicija 7.32 *U polju kompleksnih brojeva uzima se da je*

$$\boxed{z^n = w \overset{def}{\Leftrightarrow} z = \sqrt[n]{w}}$$

što znači da je $\sqrt[n]{w} \in A = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, gde je A skup rešenja jednačine $z^n = w$. U polju realnih brojeva $\sqrt[n]{\ }$ je funkcija, tj. $\sqrt[n]{x}$ je jednoznačno određen broj za n neparno i proizvoljno $x \in \mathbb{R}$ kao i za n parno i $x \geq 0$. Simbol $\sqrt[n]{\ }$ ima različita značenja u polju realnih i u polju kompleksnih brojeva, jer

$\boxed{\sqrt[n]{w}\text{ u polju }\mathbb{C}\text{ je promenljiva koja}}$

$\boxed{\text{uzima vrednosti iz skupa svih rešenja jednačine .}}$

$\boxed{z^n = w}$

U nekim udžbenicima $\sqrt[n]{w}$ definiše se kao skup svih rešenja jednačine $z^n = w$, tj. $\sqrt[n]{w} = \{z | z^n = w\}$, pa stoga odgovor na pitanje da li je $x = 1$ rešenje jednačine $\sqrt[4]{2x-3} = \sqrt[4]{x-2}$, gde je $\sqrt[4]{\ }$ kompleksni koren, zavisi od toga koja je od te dve definicije za $\sqrt[n]{w}$ usvojena!

Između tih dveju definicija nema suštinske razlike, ali formalne ipak ima!

Po definiciji n-tog korena iz knjige, odgovor na pitanje da li je $x = 1$ rešenje jednačine $\sqrt[4]{2x-3} = \sqrt[4]{x-2}$ zavisi od tačnosti implikacije $\big(x \in A \land y \in A \land |A| > 1\big) \Rightarrow x = y$ za proizvoljni skup A.

Da li je prethodna implikacija tačna?

Postoje i mišljenja da se $\sqrt[n]{\ }$ u polju kompleksnih brojeva ne mora definisati, što znači ni koristiti!

U našem slučaju dalje će se raditi po usvojenoj definiciji 7.32.

Primer 7.33 *Odrediti skup svih vrednosti za:*

a) $\sqrt[4]{1}$, *gde je* $\sqrt[4]{\ }$ *realni (algebarski) koren,*

b) $\sqrt[4]{1}$, *gde je* $\sqrt[4]{\ }$ *kompleksni koren,*

c) rešenja jednačine $x^4 - 1 = 0$ *u skupu realnih brojeva,*

d) rešenja jednačine $x^4 - 1 = 0$ *u skupu kompleksnih brojeva,*

e) rešenja jednačine $\dfrac{x^4-1}{x-1} = 0$ *u skupu realnih brojeva,*

f) rešenja jednačine $\dfrac{x^4-1}{x-1} = 0$ *u skupu kompleksnih brojeva.*

Rešenje: a) $\{1\}$, b) $\{1,-1,i,-i\}$, c) $\{1,-1\}$,
d) $\{1,-1,i,-i\}$, e) $\{-1\}$, f) $\{-1,i,-i\}$.

Zadatak 7.34 *Odrediti realni i imaginarni deo, modul, argument i skup svih kompleksnih brojeva* $z = 1 + e^{i\alpha}$ *za* $\alpha \in (-\pi, \pi]$. *Da li se rešenje zadatka menja ako se uzme da je* $\alpha \in \mathbb{R}$?

Rešenje: $R_e(z) = 1 + \cos\alpha$, $I_m(z) = \sin\alpha$, dok iz $1 + e^{i\alpha} = e^{i\frac{\alpha}{2}}(e^{-i\frac{\alpha}{2}} + e^{i\frac{\alpha}{2}}) = 2\cos\frac{\alpha}{2}e^{i\frac{\alpha}{2}}$ sledi da je modul $|z| = 2\cos\frac{\alpha}{2}$, a argument je $\frac{\alpha}{2}$. Traženi skup je jedinična kružnica sa centrom u 1.

Uraditi isto i za $-1 + e^{i\alpha}$, $-1 - e^{i\alpha}$ i $1 - e^{i\alpha}$.

U svakom zadatku u kojem se pojavi neki od izraza $\pm 1 \pm e^{i\alpha}$, **obavezno** ga transformisati na način kako je urađeno u prethodnom zadatku!

Zadatak 7.35 *Da li je* $\{1 + e^{i\theta} | \theta \in \mathbb{R}\} = \{1 - e^{i\theta} | \theta \in \mathbb{R}\}$?

Zadatak 7.36 *Odrediti realni i imaginarni deo, modul, argument i skup kompleksnih brojeva* $z = e^{i\alpha} + e^{i\beta}$ *za* $\alpha, \beta \in (-\pi, \pi]$.

Rešenje: $R_e(z) = \cos\alpha + \cos\beta$, $I_m(z) = \sin\alpha + \sin\beta$, dok iz
$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}) = 2\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} =$$
$$= \begin{cases} 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} & \text{za } \frac{\alpha-\beta}{2} \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ -2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}e^{i(\pm\pi + \frac{\alpha+\beta}{2})} & \text{za } \frac{\alpha-\beta}{2} \in (-\pi, \frac{-\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$
sledi da je modul $|z| = 2\left|\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right|$, a argument $\frac{\alpha+\beta}{2}$ za $\frac{\alpha-\beta}{2} \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ i $\pm\pi + \frac{\alpha+\beta}{2}$ za $\frac{\alpha-\beta}{2} \in (-\pi, \frac{-\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$.

Rezultat je tačan bez obzira da li ispred broja π stoji znak + ili − jer je $e^{\pm i\pi} = -1$. Međutim, znak ispred broja π ipak treba birati tako da $\pm\pi + \frac{\alpha+\beta}{2}$ bude iz intervala $(-\pi, \pi]$ jer je dogovor da je argument kompleksnog broja uvek iz intervala $(-\pi, \pi]$, i prema tome, ako je $\alpha + \beta \geq 0$, uzima se znak −, u suprotnom znak +.

Za $\alpha, \beta \in (-\pi, \pi]$ sledi: $\arg(e^{i\alpha} + e^{i\beta}) =$

$$= \begin{cases} \frac{\alpha+\beta}{2} & \text{za } \frac{\alpha-\beta}{2} \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ -\pi + \frac{\alpha+\beta}{2} & \text{za } \frac{\alpha-\beta}{2} \in (-\pi, \frac{-\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi] \ \wedge \ \alpha+\beta > 0 \\ \pi + \frac{\alpha+\beta}{2} & \text{za } \frac{\alpha-\beta}{2} \in (-\pi, \frac{-\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi] \ \wedge \ \alpha+\beta \leq 0. \end{cases}$$

U koordinatnom sistemu $\alpha O \beta$ osenčiti deo ravni $\frac{\alpha-\beta}{2} \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ unutar kvadrata $\alpha \in (-\pi, \pi]$ i $\beta \in (-\pi, \pi]$, a zatim osenčiti deo ravni kada je $\frac{\alpha-\beta}{2} \in (-\pi, \frac{-\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ takođe unutar istoga kvadrata!

Zadatak uraditi i čisto geometrijski!

Zadatak 7.37 *Dokazati da je*

$$\{e^{i\alpha} + e^{i\beta} | \alpha \in \mathbb{R} \ \wedge \ \beta \in \mathbb{R}\} = \{z | z \in \mathbb{C} \ \wedge \ |z| \leq 2\}$$

Zadatak 7.38 *Za* $z = e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{6}}$ *je:* $\arg z =$ $\quad |z| =$ $\quad z^{24} =$

Test 7.39

Zaokružiti slovo ispred tačnog odgovora. Ako je $|z| = 1$, *tada je:*

a) $z = \overline{z}$, **b)** $\arg z = \arg \overline{z}$, **c)** $z^{-1} = z$,

d) $|z| = |\overline{z}|$, **e)** $z^{-1} = \overline{z}$, **f)** $|\arg z| = |\arg \overline{z}|$.

Zadatak 7.40 *Neka su* z_1 *i* z_3 *kompleksni brojevi a* ℓ *i* θ *realni brojevi takvi da su* $\ell \geq 0$ *i* $\theta \in (-\pi, \pi]$.

a) *U zavisnosti od* z_1, z_3, θ, ℓ *izraziti kompleksni broj* z *za koji važi* $|z - z_1| = \ell$ *i* $\measuredangle z_3 z_1 z = \theta$, *koji je orijentisan, jer je* $\theta \in (-\pi, \pi]$.

b) *Ako su* z_1 *i* z_3 *temena pravilnog šestougla* $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$ *koja pripadaju njegovoj kraćoj dijagonali, izraziti temena* $z_2 z_4 z_5 z_6$ *u zavisnosti od* z_1 *i* z_3. *Koliko ima takvih šestouglova?*

Rešenje

a) Nakon translacije za vektor $-z_1$, deljenjem svakog dobijenog broja svojim modulom i rotacijom za ugao θ oko koordinatnog početka, dobija se

$$\frac{z-z_1}{|z-z_1|} = \frac{z_3-z_1}{|z_3-z_1|} e^{i\theta} \Leftrightarrow z = z_1 + \frac{\ell}{|z_3-z_1|}(z_3 - z_1)e^{i\theta}.$$

Treba primetiti da je ovo uopštenje formule za rotaciju, jer za $\frac{\ell}{|z_3-z_1|} = 1$ to je formula za rotaciju 7.29.

b) Ako se u prethodni rezultat uvrsti $z = z_0, \theta = -\frac{\pi}{6}$ i $\ell = \frac{|z_1-z_3|}{\sqrt{3}}$, dobija se centar šestougla z_0. Dalje, na osnovu kompleksnih brojeva z_0 i z_1 dobijaju se sva ostala temena po formuli za rotaciju oko z_0 za ugao $-\frac{\pi}{3}$, tj. $z_{k+1} = z_0 + (z_k - z_0)e^{-i\frac{\pi}{3}}$ redom za $k \in \{1,3,4,5\}$. Ako se umesto θ uvrsti $\frac{\pi}{6}$, tada se rotacije vrše za $+\frac{\pi}{3}$ i dobija se drugo rešenje. Postoje takva dva šestougla.

Zadatak 7.41 *Dati su kompleksni brojevi* $z_1 = 4 - i$, $z_2 = -3 - 5i$ *i* $z_3 = 2 - 4i$. *Naći kompleksne brojeve* z *koji zadovoljavaju uslove*

$$|z - z_3| = 2\sqrt{26} \quad i \quad \sphericalangle z_1 z_3 z = \frac{1}{3} \sphericalangle z_1 z_3 z_2.$$

Rešenje Zadatak ima jedno rešenje $z = 6i$, pod uslovom da se uglovi posmatraju kao konveksni i orijentisani. Ako se uglovi posmatraju kao konveksni i neorijentisani, zadatak bi pored rešenja $z = 6i$ imao još i rešenje $z = 12 - 2i$.

Ako bi se ugao $\sphericalangle z_1 z_3 z_2$ posmatrao kao konkavno orijentisan i $\sphericalangle z z_3 z_2$ kao konveksno orijentisan, tada bi rešenje bilo $z'' = 5\sqrt{3} + 3 + i(\sqrt{3} - 9)$. Ako se ugao $\sphericalangle z_1 z_3 z_2$ posmatra kao konkavno neorijentisan i $\sphericalangle z z_3 z_2$ kao konveksno neorijentisan, tada pored rešenja $z'' = 5\sqrt{3} + 3 + i(\sqrt{3} - 9)$ postoji i rešenje $z''' = -\sqrt{3} - 3 + i(5\sqrt{3} - 5)$.

Zadatak 7.42 *Neka je* $w \in \{e^{i\frac{2\pi}{7}}, e^{-i\frac{2\pi}{7}}, e^{i\frac{4\pi}{7}}, e^{-i\frac{4\pi}{7}}, e^{i\frac{6\pi}{7}}, e^{-i\frac{6\pi}{7}}\}$ *i neka je* $a = w + w^2 + w^4$ *i* $b = w^3 + w^5 + w^6$. *Dokazati da je:*
a) $w^3 \cdot w^4 = 1$, $a + b = -1$ *i* $a \cdot b = 2$, **b)** $w + w^2 + w^4 \in \{\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}\}$,
c) $\cos\frac{\pi}{14} + \cos\frac{3\pi}{14} + \cos\frac{9\pi}{14} = \frac{1}{2}\sqrt{7}$. *Uputstvo za* **c)***:*
Izračunati imaginarni deo od $a = w + w^2 + w^4$ *za* $w = e^{i\frac{2\pi}{7}}$.

Zadatak 7.43 *Kompleksni brojevi* z_1, z_2, z_3 *u kompleksnoj ravni čine jednakostranični trougao akko* $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3$. *Dokazati.*

Rešenje

$$\begin{aligned}
z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 &\quad\Leftrightarrow\\
z_1^2 + (-z_2 - z_3)z_1 + z_2^2 + z_3^2 - z_2z_3 = 0 &\quad\Leftrightarrow\\
z_1 = \tfrac{1}{2}\left(z_2 + z_3 + \sqrt{(-z_2 - z_3)^2 - 4z_2^2 - 4z_3^2 + 4z_2z_3}\right) &\quad\Leftrightarrow\\
2z_1 = z_2 + z_3 \pm i\sqrt{3}(z_2 - z_3) &\quad\Leftrightarrow\\
z_1 = z_3 + (z_2 - z_3)\tfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z_1 = R_{z_2,\pm\frac{\pi}{3}}(z_3) &\quad\Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \Delta z_1 z_2 z_3$ je jednakostranični trougao, gde oznaka $R_{z_2,\varphi}(z_3) = z_1$ govori da se rotacijom oko z_2 za ugao φ, z_3 preslikava u z_1.

Zadatak 7.44 *Dokazati da funkcija $f_\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, gde je $\theta \in (-\pi, \pi]$, definisana sa $f_\theta(z) = \overline{z}e^{i\theta}$ u kompleksnoj ravni određuje jednu osnu simetriju. Odrediti skup svih kompleksnih brojeva koji pripadaju toj osi.*

Rešenje Primetiti da je $g(z) = \overline{z}$ osna simetrija, gde je realna osa zapravo osa simetrije. Takođe je poznato da je kompozicija rotacije $R_{0,-\frac{\theta}{2}}$, osne simetrije $g(z) = \overline{z}$ i rotacije $R_{0,\frac{\theta}{2}}$ osna simetrija čija osa gradi ugao $\frac{\theta}{2}$ s prvobitnom osom (realnom osom). Znači, $\overline{ze^{-i\frac{\theta}{2}}}e^{i\frac{\theta}{2}} = \overline{z}e^{i\theta} = f_\theta(z)$ jeste osna simetrija. Skup tačaka tražene ose je

$$\{z | z \in \mathbb{C} \land (\arg(z) = \frac{\theta}{2} \lor \arg(z) = \pm\pi + \frac{\theta}{2})\} \cup \{0\},$$

gde se znak + ili − bira tako da bude $\pm\pi + \frac{\theta}{2} \in (-\pi, \pi]$.

Zadatak 7.45 *Neka su $h_\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ i $f_\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funkcije skupa kompleksnih brojeva u skup kompleksnih brojeva definisane sa*

$$h_\theta(z) = ze^{i\theta} \quad i \quad f_\theta(z) = \overline{z}e^{i\theta} \quad za \quad \theta \in A = \{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{-2\pi}{3}\}.$$

Dokazati da je

$$(S, \circ) = (\{h_0, h_{\frac{2\pi}{3}}, h_{\frac{-2\pi}{3}}, f_0, f_{\frac{2\pi}{3}}, f_{\frac{-2\pi}{3}}\}, \circ)$$

grupa, gde je operacija $\circ$ operacija kompozicije funkcija u skupu S.

Rešenje Skup S je zatvoren u odnosu na operaciju $\circ$, jer je kompozicija proizvoljne dve funkcije iz tog skupa očevidno oblika $(f_{\theta_1} \circ f_{\theta_2})(z) = \overline{\overline{z}e^{i\theta_2}}e^{i\theta_1} = ze^{-i\theta_2}e^{i\theta_1}$ ili $(h_{\theta_1} \circ h_{\theta_2})(z) = ze^{i\theta_2}e^{i\theta_1}$ ili $(f_{\theta_1} \circ h_{\theta_2})(z) = \overline{ze^{i\theta_2}}e^{i\theta_1} = \overline{z}e^{-i\theta_2}e^{i\theta_1}$ ili $(h_{\theta_1} \circ f_{\theta_2})(z) = \overline{z}e^{i\theta_2}e^{i\theta_1}$, a skup $\{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\}$ je grupa u odnosu na množenje kompleksnih brojeva. Kompozicija funkcija uvek je asocijativna operacija. Neutralni element je h_0, inverzni element za f_θ je f_θ, a za h_θ je $h_{-\theta}$. Data struktura je očevidno izomorfna grupama iz zadataka 5.55a), 5.62, 5.63, 5.28, 5.51.

Zadatak se može uopštiti ako se za skup A uzme skup svih argumenata svih n-tih korena iz jedinice, tj. za $n = 2k + 1$

$$A = \{-k\frac{2\pi}{n}, -(k-1)\frac{2\pi}{n}, ..., -\frac{2\pi}{n}, 0, \frac{2\pi}{n}, ..., (k-1)\frac{2\pi}{n}, k\frac{2\pi}{n}\},$$

a za $n = 2k + 2$

$$A = \{-k\frac{2\pi}{n}, -(k-1)\frac{2\pi}{n}, ..., -\frac{2\pi}{n}, 0, \frac{2\pi}{n}, ..., (k-1)\frac{2\pi}{n}, k\frac{2\pi}{n}, \pi\},$$

gde je k prirodan broj ili nula. Tada će ta grupa biti izomorfna diedarskoj grupi od $2n$ elemenata, svih transformacija podudarnosti koje neki pravilni n-tougao preslikavaju u samog sebe.

Zadatak 7.46 *Neka su* $\mathcal{R} = \{h_\theta | h_\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \ \wedge \ h_\theta(z) = ze^{i\theta}\}$ *i*
$\mathcal{S} = \{f_\theta | f_\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \ \wedge \ f_\theta(z) = \overline{z}e^{i\theta}\}$.
Ispitati da li su sledeće algebarske strukture grupe, gde je $\circ$ *operacija kompozicije funkcija:* **a)** $(\mathcal{R}, \circ)$, **b)** $(\mathcal{S}, \circ)$, **c)** $(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}, \circ)$.

Rešenje:

$$(f_{\theta_1} \circ f_{\theta_2})(z) = f_{\theta_1}(f_{\theta_2})(z) = \overline{\overline{z}e^{i\theta_2}}e^{i\theta_1} = ze^{-i\theta_2}e^{i\theta_1} = ze^{i(\theta_1-\theta_2)} = h_{\theta_1-\theta_2}(z),$$

$$(h_{\theta_1} \circ h_{\theta_2})(z) = h_{\theta_1}(h_{\theta_2})(z) = ze^{i\theta_2}e^{i\theta_1} = ze^{i(\theta_1+\theta_2)} = h_{\theta_1+\theta_2}(z),$$

$$(f_{\theta_1} \circ h_{\theta_2})(z) = f_{\theta_1}(h_{\theta_2})(z) = \overline{ze^{i\theta_2}}e^{i\theta_1} = \overline{z}e^{-i\theta_2}e^{i\theta_1} = \overline{z}e^{i(\theta_1-\theta_2)} = f_{\theta_1-\theta_2}(z),$$

$$(h_{\theta_1} \circ f_{\theta_2})(z) = h_{\theta_1}(f_{\theta_2})(z) = \overline{z}e^{i\theta_2}e^{i\theta_1} = \overline{z}e^{(\theta_1+\theta_2)} = f_{\theta_1+\theta_2}(z).$$

Odavde sledi da su $f_{\theta_1} \circ f_{\theta_2} \in \mathcal{R}$, $h_{\theta_1} \circ h_{\theta_2} \in \mathcal{R}$, $f_{\theta_1} \circ h_{\theta_2} \in \mathcal{S}$, $h_{\theta_1} \circ f_{\theta_2} \in \mathcal{S}$, što znači da $(\mathcal{R}, \circ)$ i $(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}, \circ)$ jesu grupoidi i očevidno i grupe, dok $(\mathcal{S}, \circ)$ nije ni grupoid. Geometrijska interpretacija skupa $\mathcal{R}$ jeste skup svih rotacija oko $O(0,0)$, a $\mathcal{S}$ je skup svih osnih simetrija koje prolaze kroz $O(0,0)$, pa je jasno da kompozicija dve rotacije je rotacija (sa istim centrom!), kompozicija dve osne simetrije je rotacija, kompozicija rotacije i osne simetrije je osna simetrija i kompozicija osne simetrije i rotacije je osna simetrija (kada je centar na osi!). Grupa $(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}, \circ)$ ima beskonačno mnogo konačnih podgrupa, i to su sve diedarske grupe sa $2n$ elemenata svako $n \in \mathbb{N}$, odnosno grupe geometrijskih transformacija podudarnosti koje pravilni n-tougao preslikavaju u samog sebe.

Zadatak 7.47 *Naći zbir:*

$$1+\cos\theta\cdot\cos\theta+\cos^2\theta\cdot\cos 2\theta+\cdots+\cos^{n-1}\theta\cdot\cos(n-1)\theta, \theta\in\mathcal{R}, n\in\mathbb{N}.$$

Rešenje $S=\sum_{r=0}^{n-1}\cos^r\theta\cdot\cos r\theta$ i $s=\sum_{r=0}^{n-1}\cos^r\theta\cdot\sin r\theta$ implicira $S+is=\sum_{r=0}^{n-1}(e^{i\theta}\cos\theta)^r=\begin{cases}\frac{1-e^{n\theta i}\cos^n\theta}{1-e^{\theta i}\cos\theta} & , \theta\neq k\pi\\ n & , \theta=k\pi\end{cases}, k\in\mathbb{Z}$

Ako je $\theta=k\pi$ tada je $S=n$, a ako je $\theta\neq k\pi$ tada je

$$S=R_e\frac{1-e^{n\theta i}\cos^n\theta}{1-e^{\theta i}\cos\theta}=1+\frac{\cos^n\theta\cdot\sin(n-1)\theta}{\sin\theta},$$

jer je $1-e^{i\theta}\cos\theta=-ie^{i\theta}\sin\theta$ i zatim prošireno sa $ie^{-i\theta}$.

Zadatak 7.48 *Rešiti po x u $\mathbb{R}$:* $\left(1+\frac{xi}{n}\right)^n-\left(1-\frac{xi}{n}\right)^n=0,\ \ n\in\mathbb{N}$.

Rešenje $\left(1+\frac{xi}{n}\right)^n-\left(1-\frac{xi}{n}\right)^n=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{1+\frac{x^2}{n^2}}\right)^n e^{ni\operatorname{arctg}\frac{x}{n}}-\left(\sqrt{1+\frac{x^2}{n^2}}\right)^n e^{-ni\operatorname{arctg}\frac{x}{n}}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2i\sin(n\operatorname{arctg}\frac{x}{n})=0\Leftrightarrow n\operatorname{arctg}\frac{x}{n}=k\pi\wedge k\in\mathbb{Z},$$

a odavde za parno n je $x=n\operatorname{tg}\frac{k\pi}{n}\wedge k\in\{0,1,\ldots,n-1\}\backslash\{\frac{n}{2}\}$, a za neparno n je $x=n\operatorname{tg}\frac{k\pi}{n}\wedge k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$.

Zadatak 7.49 *Dokazati da za svako $x,\varphi\in\mathbb{R}$ i $n\in\mathbb{N}$ važi:*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(x+2k\varphi)=2^n\cos^n\varphi\sin(x+n\varphi).$$

Rešenje Traženi zbir je imaginarni deo zbira:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{(x+2k\varphi)i}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{xi}e^{2k\varphi i}=e^{xi}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^{2\varphi i})^k=$$

$$=e^{xi}(1+e^{2\varphi i})^n=e^{xi}(e^{\varphi i}(e^{-\varphi i}+e^{\varphi i}))^n=e^{xi}(e^{n\varphi i}(2\cos\varphi)^n=$$

$=2^n\cos^n\varphi e^{(x+n\varphi)i}$, a to je $2^n\cos^n\varphi\sin(x+n\varphi)$.

Sledeći primer (7.50) veoma je važan za kompleksnu analizu jer predstavlja jedan elementaran uvod u Rimanove ravni!

FORMULE GEOMETRIJSKIH TRANSFORMACIJA PODUDARNOSTI, INVERZIJE I HOMOTETIJE

Translacija τ_w za vektor w	$\tau_w(z) = w + z$
Rotacija $\rho_{w,\theta}$ za ugao θ oko w	$\rho_{w,\theta}(z) = w + (z - w)e^{i\theta}$
Osna simetrija $\sigma_{w,\theta}$ u odnosu na pravu ℓ kojoj pripada w i koja obrazuje ugao θ s pozitivnom realnom osom	$\sigma_{w,\theta}(z) = w + \overline{(z - w)}e^{i2\theta}$
Centralna simetrija σ_w	$\sigma_w(z) = -z + 2w$
Inverzija $I_{w,R}$ u odnosu na kružnicu sa centrom u w i poluprečnika R	$I_{w,R} = w + \frac{R^2}{\overline{z-w}}$
Homotetija $h_{w,k}$ sa centrom u w i koeficijentom $k \in \mathbb{R}$	$h_{w,k}(z) = w + k(z - w)$

Primer 7.50

a) *Ako je* $A=\{1, -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$, *tada je* $\{z^3 | z \in A\} = \{$ 1, $e^{\pm\frac{2\pi}{3}}$ $\}$.

b) *Funkcija* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^3$ *je injektivna ?* DA NE.

c) *Da li je funkcija* $f_B : B \to \mathbb{C}$, $f_B(z) = z^3$ *injektivna ako je* $B = \{z | z \in \mathbb{C} \wedge 0 \le arg(z) \le \frac{2\pi}{3}\}$? DA NE.

d) *Da li je funkcija* $f_D : D \to \mathbb{C}$, $f_D(z) = z^3$ *injektivna ako je* $D = \{z | z \in \mathbb{C} \wedge 0 \le arg(z) < \frac{2\pi}{3}\} \cup \{0\}$? DA NE.

e) *Da li je funkcija* $f_E : E \to \mathbb{C}$ $f_E(z) = z^3$ *injektivna ako je E pravi nadskup od D?* DA NE.

f) *Neka je skup F podskup skupa tačaka kompleksne ravni takav da svaki jednakostranični trougao čije je težište u koordinatnom početku ima najviše jedno teme u tom skupu. Da li je funkcija* $f_F : F \to \mathbb{C}$, $f_F(z) = z^3$ *injektivna?* DA NE.

g) *Koja od prethodnih injektivnih restrikcija funkcuje* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^3$ *jeste njena* maksimalna *injektivna restrikcija (videti 3.17)?* f_D

h) *Neka je skup H* maksimalni *podskup skupa tačaka kompleksne ravni sa osobinom da svaki jednakostranični trougao s težištem u koordinatnom početku ima najviše jedno teme koje pripada tom skupu. Da li je funkcija* $f_H : H \to \mathbb{C}$, $f_H(z) = z^3$ maksimalna *injektivna restrikcija funkcije* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^3$? DA NE.

i) *Da li pored svih maksimalnih injektivnih restrikcija* $f_H : H \to \mathbb{C}$ *funkcije* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^3$ *iz prethodnog primera, postoje i neke njene druge maksimalne injektivne restrikcije?* DA NE.

Poglavlje 8

POLINOMI NAD PROIZVOLJNIM POLJIMA

t - POLINOM

x — — || — f-je

F KONAČNO POLJE $\Rightarrow$ POLINOM $\neq$ POLINOMSKA f-JA

(INAČE JESTE)

U nastavi matematike osnovnih i srednjih škola tradicionalno se polinom definiše kao „izraz" ili funkcija f polja realnih brojeva $\mathbb{R}$ u to isto polje, tako da je $f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$. Zatim se daju i definicije jednakosti dva polinoma što bi, inače, trebalo da sledi iz definicije polinoma. Nije tačna definicija (ili tvrđenje) da su dva polinoma jednaka ako su jednake njihove odgovarajuće funkcije!

Primer: ako je $(F, +, \cdot)$ konačno polje karakteristike 3 (na primer sabiranje i množenje po modulu 3), tj. $F = \{0, 1, 2\}$, tada **različiti** polinomi, $P(t) = 1 + 2t + t^2 + t^3$ i $Q(t) = 1 + t^2$, nad tim poljem kao funkcije su jednaki jer se lako proverava da je $1 + 2x + x^2 + x^3 = 1 + x^2$ tačno za svako $x \in \{0, 1, 2\}$, jer je reč o sabiranju i množenju po modulu 3.

Pokazaće se da ako je polje koeficijenata beskonačno (na primer ako je karakteristike 0), tada je definicija polinoma kao funkcije izomorfna korektnoj definiciji polinoma. Videti 8.40 i 8.43.

Slede definicija konstante i promenljive i definicija polinoma nad proizvoljnim poljem.

Definicija 8.1 *Konstanta skupa F je proizvoljni element skupa F. Promenljiva skupa F je simbol (na primer, $x, y, z, t, x_1, y_1, z_1, t_1, ...$) koji se može zameniti bilo kojim elementom skupa F.*

Definicija 8.2 *Skup svih polinoma, u oznaci $F[t]$, nad nekim poljem F s promenljivom t, može se definisati na sledeći način:*

1) *Konstante i promenljiva t polja F jesu polinomi nad poljem F.*

2) *Ako su A i B polinomi nad poljem F, tada su $(A+B)$ i $(A \cdot B)$ takođe polinomi nad poljem F, gde su $+$ i $\cdot$ binarne operacije u $F[t]$ koje su asocijativne, komutativne i važi distributivni zakon operacije $\cdot$ prema operaciji $+$ i takve da su $+$ i $\cdot$ iz polja F njihove restrikcije. Jedinica e i nula 0 polja F redom su neutralni elementi za operacije $\cdot$ i $+$, dok inverzni element za polinom $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n$ u odnosu na sabiranje $+$ jeste polinom $-a_0 - a_1 t - a_2 t^2 - ... - a_n t^n$ (videti* 8.3).

3) *Polinomi nad poljem F mogu se dobiti samo primenom* **1)** *i* **2)**, *i to konačno mnogo puta.*

$(A \cdot B)$ pisaće se kao (AB). Zbog zakona asocijativnosti množenja može se uvesti dogovor o brisanju zagrada pa u slučaju $((t \cdot t) \cdot t)$ pisaće se $t \cdot t \cdot t$ tj. samo t^3, zbog uobičajene oznake u multiplikativnim grupoidima. Analogno za operaciju $+$ umesto $((t+t)+t)$ pisaće se $t+t+t$ ili $3t = 3(e \cdot t) = e \cdot t + e \cdot t + e \cdot t = (e+e+e) \cdot t = (3e) \cdot t = (3e)t$, gde je e neutralni element polja F u odnosu na množenje. Ako je F polje realnih brojeva, tada je $3t = 3 \cdot t$. Dokazati! Takođe se uvodi konvencija o brisanju spoljnih (krajnjih) zagrada i konvencija da operacija $\cdot$ ima prednost u odnosu na operaciju $+$ pa se umesto $(x + (y \cdot z))$ piše samo $x + yz$.

Teorema 8.3 *Zbog ovih dogovora (konvencija), svaki polinom iz $F[t]$, izuzev nula polinoma, ima oblik $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n$, gde su $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ iz polja F, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (t^0 je po definiciji jednako jedinici polja F) i t je promenljiva polja F.*

Nula polja F je polinom koji je neutralni element za sabiranje polinoma, naziva se nula polinom i označava se sa 0.

Jedinica polja F je polinom koji je neutralni element za množenje polinoma i označava se sa 1 ili e.

Drugim rečima, algebarska struktura polinoma nad poljem $(F,+,\cdot)$ jeste proširenje polja $(F,+,\cdot)$ do najmanjeg prstena $(F[t],+,\cdot)$, pomoću jednog novog elementa $t \notin F$ i elemenata iz F, korišćenjem operacija $+$ i $\cdot$ iz $(F[t],+,\cdot)$, koje su proširenje operacija $+$ i $\cdot$ iz polja $(F,+,\cdot)$.

Teorema 8.4 *Ako je polinom P različit od nula polinoma, tada postoji samo jedan $a_n \in F \setminus \{0\}$, takav da je $P = a_0 + a_1t + a_2t^2 + ... + a_nt^n$.*

Definicija 8.5 *Nenegativan broj n iz prethodne teoreme* 8.4 *naziva se stepen toga nenula polinoma $P = a_0+a_1t+a_2t^2+...+a_nt^n$ i označava sa $dg(P) = n$, a $a_n \neq 0$ naziva se vodeći koeficijent tog nenula polinoma.*

Stepen nula polinoma nije definisan! [1]

Može se reći da izraz $a_0 + a_1t + a_2t^2 + ... + a_it^i + \dots$ jeste polinom ako je samo konačno mnogo koeficijenata a_i različito od nule, gde je $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Drugim rečima, izraz $a_0 + a_1t + a_2t^2 + ... + a_it^i + \dots$ je polinom akko postoji tačno jedan $i = n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takav da je $a_n \neq 0$ i $a_i = 0$ za sve $i > n$, gde su a_i iz polja F, a t „promenljiva".

Primer 8.6 *Za sledeće polinome P i Q nad poljem F važi:*

a) $P + Q = (a_0 + a_1t + a_2t^2) + (b_0 + b_1t + b_2t^2 + b_3t^3) =$
$= a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + b_3t^3.$

b) $PQ = (a_0 + a_1t + a_2t^2)(b_0 + b_1t + b_2t^2 + b_3t^3) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)t + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)t^2 + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1)t^3 + (a_1b_3 + a_2b_2)t^4 + a_2b_3t^5.$

Teorema 8.7 *Ako su P i Q nenula polinomi nad poljem F, tada je*

a) $PQ \neq 0$, *b)* $dg(PQ) = dg(P) + dg(Q)$.

Teorema 8.8 *Skup svih polinoma nad proizvoljnim poljem F u odnosu na operaciju sabiranja polinoma $+$ i operaciju množenja polinoma $\cdot$ ima algebarsku strukturu domena integriteta.*

Znači, $(F[t],+,\cdot)$ jeste domen integriteta polinoma nad poljem F.

[1] U nekim udžbenicima definiše se da je stepen nula polinoma $-\infty$, međutim mnogi dokazi su jasniji ako se stepen nula polinoma ostavi nedefinisan.

Treba primetiti da se operacije sabiranja i množenja polinoma obeležavaju istim simbolima kao i operacije sabiranja i množenja u polju F, što nikada neće izazvati zabunu, jer ako se operacija $+$ nalazi između dva polinoma, onda je to sabiranje polinoma itd.

Svaki element a polja F takođe je polinom, njegov stepen je 0 za $a \neq 0$ i naziva se konstantni polinom ili polinom stepena 0.[2] Da li je konstantni polinom različit od nule isto što i polinom stepena nula? Videti 8.32.

Definicija polinoma nad poljem F kao uređene n-torke elemenata iz polja F čija je poslednja komponenta različita od 0, ekvivalentna je definiciji polinoma kao beskonačnog niza čiji su elementi (članovi) iz polja F i postoji član niza posle kojega su svi članovi niza jednaki 0.

Naravno, te definicije su ekvivalentne definiciji 8.2, što znači da su odgovarajuće strukture polinoma izomorfne.

Evo definicije polinoma kao uređene n-torke koja nije neophodna.

Definicija 8.9 *Elementi skupa* $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F^i = F \cup F^2 \cup F^3 \cup \ldots$ *(skup svih i-torki za sve $i \in \mathbb{N}$) jesu polinomi nad poljem F ako je njihova poslednja komponenta različita od nule. Nula polja F je polinom i naziva se nula polinom.*

Elementi skupa $F \cup F^2 \cup F^3 \cup \ldots$, gde je F neko polje, jesu polinomi ako je u svakoj i-torki za $i > 1$ poslednja komponenta različita od 0. Znači, ako je $P = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ polinom nad poljem F, onda je za $n > 0$ $a_n \neq 0$, dok za $n = 0$ $a_0 \in F$, tj. a_0 može biti i nula, pa zbog $F^1 = F$ sledi da je $(a_0) = a_0$ polinom za svako $a_0 \in F$ i naziva se konstantan polinom.

Definicija 8.10 *Stepen polinoma $P \neq 0$ je broj komponenti umanjen za jedan i označava se sa $dg(P)$, a poslednja komponenta naziva se vodeći koeficijent. Polinom je normalizovan ako je njegov vodeći koeficijent jednak* 1.

Ako je polinom $P = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \neq 0$, tada je $dg(P) = n$. Stepen polinoma $P = a \in F\backslash\{0\}$ je nula. Stepen nula polinoma ne definiše se.

Definicija 8.11 *Neka su $P = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ i $Q = (b_0, b_1, \ldots, b_m)$ polinomi i neka je $a_j = 0$ za $j > n$ i $b_j = 0$ za $j > m$. Operacije sabiranja $+$ i množenja $\cdot$ u skupu polinoma definišu se sa*

$$P + Q = (d_0, d_1, \ldots, d_s),$$

gde je $d_j = a_j + b_j$, s najveći nenegativan ceo broj za koji je $d_s \neq 0$ i, ako takav s ne postoji, zbir je nula polinom, a

$$P \cdot Q = (c_0, c_1, \ldots, c_r),$$

gde je $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$, r najveći nenegativan ceo broj za koji je $c_r \neq 0$ i, ako takav r ne postoji, proizvod je nula polinom.

[2]Kasnije, uvođenjem polinomskih funkcija, biće opravdan termin konstantan polinom, ali samo za polinome nad beskonačnim poljem.

Prethodne tri definicije mogu se dati u istoj formulaciji i ako se umesto polja F uzme prsten R. Operacija „ + " u skupu polinoma označena je istim simbolom kao i operacija „ + " polja F, što neće stvoriti zabunu jer će iz konteksta uvek biti jasno o kojoj je operaciji reč. Analogno važi i za operaciju „ · ".

Primer 8.12 *Za sledeće polinome nad poljem F važi*

a) $(a_0, a_1, a_2) + (b_0, b_1, b_2, b_3) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, b_3)$,

b) $(a_0, a_1, a_2)(b_0, b_1, b_2, b_3) = (a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0,$
$a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0, a_0b_4 + a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 + a_4b_0,$
$a_0b_5 + a_1b_4 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_1 + a_5b_0) =$
$= (a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1, a_1b_3 + a_2b_2, a_2b_3)$
jer je $a_3 = a_4 = a_5 = b_4 = b_5 = 0$,

c) $(2, -3, 4) + (8, 7, -4) = (10, 4)$,

d) $(3, -5, 2) + (-3, 5, -2) = 0$,

e) Ako su $P = (b_0) = b_0 \in F\backslash\{0\}$ *i* $Q = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ *polinomi, tada je* $PQ = b_0(a_0, a_1, \ldots, a_n) = (b_0a_0, b_0a_1, \ldots, b_0a_n)$. *Takođe je* $0 \cdot (a_0, a_1, \ldots, a_n) = 0$.

Teorema 8.13 *Ako su* $P = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ *i* $Q = (b_0, b_1, \ldots, b_m)$ *nenula polinomi nad poljem F i* $PQ = (c_0, c_1, \ldots, c_r)$, *tada je* $c_r = c_{n+m} = a_nb_m$.

Dokaz Po definiciji 8.3 stoji da je $c_{n+m} = \sum_{j=0}^{n+m} a_jb_{m+n-j}$. Ako je $j = 0, 1, \ldots, n-1$, tada je $m + n - j > m$ pa je $b_{m+n-j} = 0$, a ako je $j = n + 1, n + 2, \ldots, m + n$, tada je $a_j = 0$. Znači, jedini sabirak u toj sumi koji nije nula, je za $j = n$, pa je $c_{n+m} = a_nb_{m+n-n} = a_nb_m$ jer je $a_n \neq 0$ i $b_m \neq 0$, tj. $a_nb_m \neq 0$ zbog nepostojanja delitelja nule u polju F. Kako je $c_i = 0$ za $i > m+n$, to znači da je $m+n$ najveći nenegativan ceo broj za koji je $c_{n+m} \neq 0$, pa je $c_r = c_{n+m} = a_nb_m$. □

Posledica 8.14 *Ako su P i Q nenula polinomi nad poljem F, tada je*

a) $PQ \neq 0$, *b)* $dg(PQ) = dg(P) + dg(Q)$.

Definicija 8.15 *Polinom* $(0, 1)$ *nad nenula prstenom sa jedinicom, označavaće se sa t, odnosno* $(0, 1) = t$.

Teorema 8.16 *Za svaki polinom* $P = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ *nad prstenom sa jedinicom važi:*

$$P = (a_0, a_1, \ldots, a_n) = a_0 + a_1t + \ldots + a_nt^n.$$

Dokaz Kako je $(a_0, a_1)(b_0, b_1) = (a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)$, to je

$$(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (0, 0, 1) \text{ jer } a_0 = b_0 = a_2 = b_2 = 0 \text{ i } a_1 = b_1 = 1.$$

Indukcijom se lako pokazuje da je $(0, 1)^k = \underbrace{(0, 0, \ldots, 0, 1)}_{k+1}$. Za $k = 2$ tvrđenje je pokazano. Pretpostavimo da je tačno za k i dokažimo da je tačno za $k + 1$. Ako su

$$(0, 1) = (a_0, a_1), \quad \underbrace{(0, 0, \ldots, 0, 1)}_{k+1} = (b_0, b_1, \ldots, b_k) \text{ i}$$

$$\underbrace{(0, 0, \ldots, 0, 1)}_{k+2} = (c_0, c_1, \ldots, c_{k+1}), \text{ tada je}$$

$$(0,1)^{k+1} = (0,1)(0,1)^k = (0,1)(\underbrace{0,0,\ldots,0,1}_{k+1}) = (\underbrace{0,0,\ldots,0,1}_{k+2})$$

jer je zbog teoreme 8.13, $c_{k+1} = a_1 b_k = 1 \cdot 1 = 1$, a za $i < k+1$ je $c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} = 0$, jer je $b_0 = b_1 = \ldots = b_{k-1} = 0$ i $a_0 = 0$. Dalje je očevidno jer za $a_i \neq 0$ je $a_i(0,0,\ldots,1) = (0,0,\ldots,a_i)$ i $0 \cdot (0,0,\ldots,1) = 0$. □

Skup svih polinoma nad poljem F označavaće se sa $F[t]$.

Teorema 8.17 *$(F[t], +, \cdot)$ je domen integriteta.*

Dokaz se izvodi na osnovu 8.9, 8.11, 8.13 i 8.14 kao i asocijativnosti i distributivnosti, čija se dokazivanja ostavljaju čitaocu. Takođe važi sledeća teorema.

Teorema 8.18 *Ako je R prsten sa jedinicom, tada je $(R[t], +, \cdot)$ prsten sa jedinicom. Ako je R komutativni prsten sa jedinicom, tada je $(R[t], +, \cdot)$ komutativni prsten sa jedinicom. Ako je R domen integriteta, tada je i $(R[t], +, \cdot)$ domen integriteta. Ni za jedan prsten R sa jedinicom $(R[t], +, \cdot)$ nije polje.*

U daljem tekstu radiće se isključivo s polinomima nad nekim poljem F.

Svejedno je da li će se polinomi zapisivati sa $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ ili $a_0 + a_1t + a_2t^2 + \ldots + a_nt^n$, međutim u nekim knjigama uobičajeno je da se polinom označava sa $a_0 + a_1t + a_2t^2 + \ldots + a_nt^n$, a njemu odgovarajuća polinomska funkcija sa $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$.

Teorema 8.19 *Teorema o deljenju polinoma. Za svaka dva polinoma S i $T \neq 0$, postoje takvi jedinstveni polinomi Q i R, da je*

$$S = QT + R \quad \wedge \quad (R = 0 \ \vee \ dg(R) < dg(T)).$$

Uobičajeno je da se $S = QT + R$ piše i u obliku

$$\frac{S}{T} = Q + \frac{R}{T} \text{ ili } S : T = Q + \frac{R}{T}.$$

Dokaz

- Ako je $S = 0$, tada je $-QT = R$, odakle sledi $Q = 0$ i $R = 0$ jer bi u protivnom stepen polinoma na levoj strani jednakosti $-QT = R$ bio veći od stepena polinoma na desnoj strani.

- Ako su $S \neq 0$ i $dg(S) < dg(T)$, tada očevidno mora biti $Q = 0$ i $S = R$ jer bi se opet dobili polinomi različitih stepena na levoj i desnoj strani jednakosti $S = QT + R$.

- Ako su $S \neq 0$ i $dg(S) \geq dg(T)$, tada se uzima da je $S = a_0 + a_1t + a_2t^2 + ... + a_nt^n$ i $T = b_0 + b_1t + b_2t^2 + ... + b_mt^m$. Sada će biti definisan konačan niz polinoma $S_1, S_2, \ldots, S_k$ čiji su vodeći koeficijenti označeni sa s_i, na sledeći način:

$$\begin{aligned} S_1 &= S - a_nb_m^{-1}t^{n-m}T \\ S_2 &= S_1 - s_1b_m^{-1}t^{dg(S_1)-m}T \\ &\vdots \\ S_k &= S_{k-1} - s_{k-1}b_m^{-1}t^{dg(S_{k-1})-m}T \end{aligned}$$

gde je k najmanji prirodni broj za koji će biti $S_k = 0$ ili $dg(S_k) < dg(T)$. Dokazati da takav broj k postoji. Ako je $S_k = 0$ za neki prirodni broj k, onda je dokaz gotov. U suprotnom slučaju je $dg(S) > dg(S_1)$, jer su polinomi S i $a_nb_m^{-1}t^{n-m}T$ očevidno istog stepena i imaju jednake vodeće koeficijente. Na isti način zaključuje se da je $dg(S_1) > dg(S_2) > dg(S_3) > ...$, što znači da će postojati takav prirodan broj k za koji je $dg(S_k) < dg(T)$. Zamenom S_1 iz prve u drugu jednakost, zatim zamenom S_2 iz druge u treću jednakost, ...i, na kraju, zamenom S_{k-1} iz $k-1$-ve u k-tu jednakost sledi da je $S = QT + R$, gde je $R = S_k$ i

$$Q = a_nb_m^{-1}t^{n-m} + s_1b_m^{-1}t^{dg(S_1)-m} + \ldots + s_{k-1}b_m^{-1}t^{dg(S_{k-1})-m}.$$

Ako bi pored polinoma Q i R, koji zadovoljavaju uslove teoreme postojali i polinomi Q_1 i R_1 koji zadovoljavaju uslove teoreme, tada bi se dobilo $S = QT + R$ i $S = Q_1T + R_1$, odakle oduzimanjem sledi da je $-(Q - Q_1)T = R - R_1$, a odavde obavezno sledi da je $R - R_1 = 0$ i $Q - Q_1 = 0$ jer bi u protivnom u jednakosti $-(Q - Q_1)T = R - R_1$ bilo da je stepen polinoma na levoj strani viši od stepena polinoma na desnoj strani. Ovim je pokazana i jedinstvenost polinoma Q i R.□

Ovaj dokaz očevidno daje i postupak (algoritam) za efektivno određivanje polinoma Q i R, pa se zato naziva algoritam deljenja, Q je količnik, a R ostatak pri deljenju polinoma S polinomom T. Ilustracija na primeru

$$S = 1 - 2t + t^2 - t^3 + 2t^4 \quad \text{i} \quad T = t^2 + t + 1$$

$$
+\begin{cases} (2t^4 - t^3 + t^2 - 2t + 1) : (t^2 + t + 1) = 2t^2 - 3t + 2 + \frac{-t-1}{t^2+t+1} \\ \underline{-(2t^4 + 2t^3 + 2t^2)} \end{cases}
$$

$$
+\begin{cases} -3t^3 - t^2 - 2t + 1 \qquad = S - 2t^2T = S_1 \\ \underline{-(-3t^3 - 3t^2 - 3t)} \end{cases}
$$

Znači,

$$
+\begin{cases} 2t^2 + t + 1 \qquad = S_1 + 3tT = S_2 \\ \underline{-(2t^2 + 2t + 2)} \end{cases}
$$

$$
-t - 1 \qquad = S_2 - 2T = S_3
$$

količnik je $Q = 2t^2 - 3t + 2$, a ostatak $R = S_3 = -t - 1$.

Definicija 8.20 *Polinom T deli polinom S (S je deljivo sa T) u oznaci $T|S$ ako postoji takav polinom Q da je $S = QT$.*

Posledica 8.21 *Iz definicije* 8.20 *direktno sledi*

$$(T|S \wedge S|R) \Rightarrow T|R;$$

$$(T|S \wedge T|R) \Rightarrow T|(S + R);$$

$$(T|S \wedge S|T) \Rightarrow (\exists a \in F)\ \ T = aS;$$

$$T|S \Rightarrow T|SR;$$

za sve polinome T, S i R iz $F[t]$.

Definicija 8.22 *Najveći zajednički delilac polinoma S i T je polinom W (W=$NZD(S,T)$) ako*

a) $W|S \wedge W|T$, *b)* $(\forall W_1 \in F[t])\ \ (W_1|S \wedge W_1|T) \Rightarrow W_1|W$.

Drugim rečima, najveći zajednički delilac proizvoljnih polinoma S i T, tj. $NZD(S,T)$ jeste polinom W koji deli i polinom S i polinom T, a svaki drugi polinom W_1 koji takođe deli polinome S i T , deli i polinom W. Kraće rečeno, **najveći zajednički delilac dva polinoma je polinom najvišeg stepena koji deli oba ta polinoma.** Na primer, najveći zajednički delitelj

za polinome
$a(t-3)^4(t+7)^2(t-1)^5(t+13)^3$ i $b(t-3)^2(t-15)(t-1)^7(t+13)^5$
jeste polinom $c(t-3)^2(t-1)^5(t+13)^3$, gde su a, b i c proizvoljni elementi polja nad kojim se ti polinomi posmatraju.

Definicija 8.23 *Polinomi su uzajamno prosti ako ne postoji polinom, različit od konstantnog, koji deli oba, tj. ne može se izvući ništa kao zajednički faktor iz ta dva, različito od konstante.*

Koja definicija je analogna ovoj definiciji u prstenu celih brojeva, odnosno monoidu (asocijativnom grupoidu s neutralnim elementom) prirodnih brojeva?

Teorema 8.24 *Postoji tačno jedan takav normalizovani polinom W da je W=NZD(S,T), gde su S i T takvi polinomi da je bar jedan od njih različit od nule.*

Dokaz Ako je $S=0 \wedge T \neq 0$, tada je NZD$(S,T)=a^{-1}T$, gde je a vodeći koeficijent polinoma T. Analogan je i slučaj kad je $S \neq 0 \wedge T = 0$. Neka je sada $dg(S) \geq dg(T)$. Na osnovu prethodne teoreme važi

$$\begin{array}{rcll}
S & = & QT+R_1 & \wedge \quad (R_1=0 \vee dg(R_1)<dg(T)) \\
T & = & Q_1R_1+R_2 & \wedge \quad (R_2=0 \vee dg(R_2)<dg(R_1)) \\
& \vdots & & \\
R_{k-2} & = & Q_{k-1}R_{k-1}+R_k & \wedge \quad (R_k=0 \vee dg(R_k)<dg(R_{k-1})) \\
R_{k-1} & = & Q_kR_k. &
\end{array}$$

Iz priloženog algoritma (poznat kao Euklidov algoritam) za dobijanje niza polinoma $R_1, R_2, \ldots$ očevidno je da postoji prirodni broj k za koji je $R_{k+1}=0$ ili $dg(R_k)=0$ jer je $dg(T)>dg(R_1)>dg(R_2)>\ldots>dg(R_{i-1})>dg(R_i)\ldots$ Pokazaće se da je R_k zajednički delilac polinoma S i T. Iz poslednje jednakosti sledi $R_k|R_{k-1}$, što na osnovu pretposlednje, implicira da je $R_k|R_{k-2}, \ldots$, a dalje, na osnovu druge, sledi da je $R_k|T$ i što, na osnovu prve, implicira da je $R_k|S$. Znači da je R_k zajednički delilac za S i T. Dokazati sad da je R_k i *najveći* zajednički delilac za S i T. Pretpostavimo da su $W_1|S$ i $W_1|T$. Tada iz prve jednakosti sledi da je $W_1|R_1$, što zajedno s drugom implicira da je $W_1|R_2, \ldots$, a zajedno s pretposlednjom implicira da je $W_1|R_k$ pa je dakle R_k=NZD(S,T), a traženi normalizovani polinom je $W=a^{-1}R_k$, gde je a vodeći koeficijent polinoma R_k. Jedinstvenost polinoma W jednostavno se dokazuje kontradikcijom, korišćenjem posledice 8.21. $\square$

Teorema 8.25 *(Hornerova shema). Pri deljenju polinoma* $P = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ *polinomom* $t - \alpha$*, dobija se količnik*

$Q = b_0 + b_1 t + \ldots + b_{n-1} t^{n-1}$ *i ostatak* R*, pri čemu je*

$b_{n-1} = a_n,\ b_{n-2} = \alpha b_{n-1} + a_{n-1}, \ldots, b_0 = \alpha b_1 + a_1,\ R = \alpha b_0 + a_0.$

Dokaz Izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće stepene (tj. adekvatnih komponenti) dobijaju se odgovarajuće jednakosti. $\square$

Ovaj rezultat zapisuje se u obliku sledeće sheme, Hornerove sheme.

$$\begin{array}{c|cccccc}
\alpha & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\
\hline
 & a_n & \alpha b_{n-1} + a_{n-1} & \alpha b_{n-2} + a_{n-2} & \cdots & \alpha b_1 + a_1 & \alpha b_0 + a_0 \\
 & \| & \| & \| & & \| & \| \\
 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & R
\end{array}$$

Definicija 8.26 *Neka je* ψ *funkcija koja svakom polinomu*

$$P = (a_0, a_1, \ldots, a_n) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$$

pridružuje funkciju $\psi(P)$ *polja* F *u polje* F*, odnosno*

$$\psi(P) : F \to F \quad \textit{tako da} \quad (\forall x \in F) \ \ \psi(P)(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

Funkcija $\psi(P)$*, polja* F *u polje* F*, naziva se polinomska funkcija polinoma* P*.*

Može se smatrati da je $n+1$-torka $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ samo kraća oznaka za polinom $a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$!

Definicija 8.27 *Skup svih polinomskih funkcija nad poljem* F *označavaće se sa* $\mathcal{P}ol(F)$*.*

Definicija 8.28 *Neka je* F *proizvoljno polje. Tada se u skupu funkcija* $F^F = \{f | f : F \to F\}$ *definišu operacije* $+$*,* $\cdot$ *i* $\circ$ *na sledeći način:*

$$\begin{aligned}
(\forall x \in F) &\quad (f+g)(x) = f(x) + g(x), \\
(\forall x \in F) &\quad (fg)(x) = f(x)g(x), \\
(\forall x \in F) &\quad (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big),
\end{aligned}$$

za sve f *i* g *iz* $F^F = \{f | f : F \to F\}$*.*

Zadatak 8.29 *Ako su F polje i $+, \cdot,$ i $\circ$ operacije u F^F, a $+, \cdot,$ u $F[t]$ da li je*

a) $(F^F, +, \cdot)$ *prsten?* T
b) $(F[t], +, \cdot)$ *domen integriteta?* T
c) $(F^F, +, \cdot)$ *domen integriteta?* $\perp$
d) $(\mathcal{P}ol(F), +, \cdot)$ *domen integriteta?* $\perp$ $(\top \Leftarrow \infty)$
e) $(F^F, +, \circ)$ *prsten? (Distributivnost!)*
f) $(\{f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f_k(x) = kx, k \in \mathbb{R}\}, +, \circ)$ *polje?*
g) *Odrediti nenula funkcije f i g iz $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ takve da je $f \circ g$ nula funkcija.*

a) $f_k \circ (f_m + f_n) = f_k(mx + nx) = k(mx + nx) = kmx + knx = \downarrow$

Napomena: Jedino operacije iz zadatka pod **b)** nisu definisane u skupu funkcija $F^F = \{f | f : F \to F\}$, već su sabiranje i množenje polinoma.
Rešenje pod c): Ne, jer postoje delitelji nule. Za $F = \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & za \quad x \neq 3 \\ 3 & za \quad x = 3 \end{cases} \quad \text{i} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & za \quad x \neq 5 \\ 5 & za \quad x = 5 \end{cases}$$

sledi da je $f \cdot g$ nula funkcija, odnosno $(\forall x \in \mathbb{R})(f \cdot g)(x) = 0$.
Rešenje pod d): Ako je F beskonačno polje, odgovor je DA, a ako je F konačno polje, odgovor je NE, jer su nad poljem $\mathbb{Z}_3$ polinomske funkcije $f(x) = x$ i $g(x) = x^2 + 2$ nenula funkcije, a njihov proizvod jeste nula funkcija, jer je $f(x) \cdot g(x) = x^3 + 2x = 0$ za svako x iz $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$.
Rešenje pod g):

$$f(x) = \begin{cases} 1 & za \quad x \neq 2 \wedge x \neq 3 \\ 0 & za \quad x = 2 \vee x = 3 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2 & za \quad x \neq 4 \\ 3 & za \quad x = 4 \end{cases}$$

odakle sledi da je $f \circ g$ nula funkcija, odnosno $(\forall x \in \mathbb{R})(f \circ g)(x) = 0$.
Ili primer, $f(x) = x^2 - x$ i $g(x) = sgn\ x^2$.

Domen funkcije ψ iz definicije 8.26 jeste skup svih polinoma $F[t]$, a kodomen (skup slika) je skup svih polinomskih funkcija $\mathcal{P}ol(F)$, tj.

$$\psi : \quad F[t] \to \mathcal{P}ol(F) \subseteq F^F.$$

Teorema 8.30 *Funkcija $\psi : F[t] \to \mathcal{P}ol(F)$ jeste sirjektivni homomorfizam (epimorfizam), domena integriteta $(F[t], +, \cdot)$ u komutativni prsten sa jedinicom $(\mathcal{P}ol(F), +, \cdot)$.*

Dokaz Neka su $P = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ i $Q = (b_0, b_1, \ldots, b_m)$ polinomi nad poljem F i neka je $n < m$. Tada je za svako x iz F

$\uparrow = f_k(f_m) + f_k(f_n) = ((f_k \circ f_m) + (f_k \circ f_n))(x)$

$$\psi(P+Q)(x) = \psi(a_0+b_0, a_1+b_1, \ldots, a_n+b_n, b_{n+1}, \ldots, b_m)(x) = \\ (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\ldots+(a_n+b_n)x^n+b_{n+1}x^{n+1}+\ldots+b_mx^m = \\ a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m = \psi(P)(x)+\psi(Q)(x) = \\ (\psi(P)+\psi(Q))(x), \text{ što znači da je } \psi(P+Q)=\psi(P)+\psi(Q)$$

Analogno se pokazuje i $\psi(PQ) = \psi(P) \cdot \psi(Q)$. □

U teoremi 8.43 dokazaće se sledeće: *ako je F beskonačno polje*, tada je funkcija ψ injektivna, pa je $F[t]$ izomorfan s $\mathcal{P}ol(F)$, što znači da se u tom slučaju pojmovi polinom P i polinomska funkcija $\psi(P)$ u daljem radu mogu smatrati istovetnim, tj. $\psi(P)$ može se označiti samo sa P i neće biti zabune zbog pomenutog izomorfizma. Međutim, ako je F konačno polje, tada ψ nije injektivna. Na primer, ako je $F = \mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$, tada se polinomi $P = (1,2,1,1) = 1+2t+t^2+t^3$ i $Q = (1,0,1) = 1+t^2$ nad tim poljem sa funkcijom ψ, preslikavaju u istu polinomsku funkciju, jer se lako proverava da je $1+2x+x^2+x^3 = 1+x^2$ identitet u polju $F = \mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$. U prstenu $(\mathcal{P}ol(F), +, \cdot)$ postoje delitelji nule ako je F konačno polje. Na primer, ako je $F = \mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$, a $f, g \in \mathcal{P}ol(F)$ definisani sa $f(x) = x$ i $g(x) = x^2+2$, tada je $(fg)(x) = f(x)g(x) = x^3+2x = 0$ za svako $x \in F$, to jest $fg = 0$, a $f \neq 0$ i $g \neq 0$. Uopšte, ako je F polje od m elemenata, tada je $F\backslash\{0\}$ grupa u odnosu na operaciju $\cdot$ (takozvana multiplikativna grupa u odnosu na množenje) od $m-1$ elemenata, pa je $x^{m-1} = 1$ za svako x iz $F\backslash\{0\}$, jer u svakoj multiplikativnoj grupi važi da je svaki element stepenovan ukupnim brojem elemenata te grupe jednak neutralnom elementu (teorema 5.40), a odatle sledi:

Teorema 8.31 *Za svako x iz polja F od m elemenata je* $x^m = x$.

Primer 8.32 *Neka je $f(x) = x^5+4x+1$ polinomska funkcija nad poljem $\mathbb{Z}_5$. Popuniti tabelu*

x	0	1	2	3	4
$f(x)$					

Da li je f konstantan polinom?

Definicija 8.33 *Vrednost polinoma P u tački α je vrednost njegove polinomske funkcije $\psi(P)$ u tački α. Koren (nula) polinoma P je koren (nula) njegove polinomske funkcije $\psi(P)$.*

Drugim rečima, ako je $\psi(P)(\alpha) = 0$, onda je α koren polinoma P.

Teorema 8.34 *(Bezuova). Vrednost polinoma P nad poljem F u tački α, to jest $\big(\psi(P)(\alpha)\big)$, jednaka je ostatku pri deljenju polinoma P polinomom $(-\alpha, 1) = t - \alpha = -\alpha + t$.*

Dokaz Na osnovu teoreme 8.19 postoje jedinstveni polinomi Q i R $(R = 0 \vee dg(R) < dg(t - \alpha))$ takvi da je

$$\begin{array}{rcll} P & = & (t-\alpha)Q + R & \text{odakle je zbog 8.30} \\ \psi(P) & = & \psi(t-\alpha)\psi(Q) + \psi(R) & \text{odnosno} \\ (\forall x \in F)\ \psi(P)(x) & = & (x-\alpha)\psi(Q)(x) + R. & \end{array}$$

Treba uočiti da se u prethodne tri jednakosti pojavljuje šest binarnih operacija: sabiranje i množenje polinoma, sabiranje i množenje funkcija i sabiranje i množenje u polju F. Takođe je $R \in F$ zbog $R = 0 \vee dg(R) < dg(t - \alpha) = 1$, odnosno $R = 0 \vee dg(R) = 0$.

Ako se uzme da je $x = \alpha$, dobija se da je

$$\psi(P)(\alpha) = (\alpha - \alpha)\psi(Q)(\alpha) + R, \quad \text{odnosno} \quad \psi(P)(\alpha) = R. \quad \square$$

Posledica prethodne, Bezuove teoreme jeste teorema:

Teorema 8.35 *Polinom $t - \alpha$ faktor je polinoma P (P je deljiv sa $t - \alpha$) ako i samo ako je α koren polinoma P.*

Dokaz Sledi na osnovu teoreme 8.34.

Na primer, polinom $P = t^3 - 6t^2 + 11t - 6$ deljiv je polinomom $t - 1$ jer je 1 koren (nula) polinoma P.

Definicija 8.36 *Koren α polinoma P jeste višestrukosti k, odnosno k-tog reda ili k-tostruki koren, ako je polinom P deljiv polinomom $(t - \alpha)^k$, a nije deljiv polinomom $(t - \alpha)^{k+1}$.*

Primer 8.37 *Ako je $P = a(t - \alpha)^3(t - \beta)(t - \gamma)^2(t - \delta)^5$, onda su α, β, γ i δ koreni polinoma P, i to trećeg, prvog, drugog i petog reda.*

Teorema 8.38 *Ako za svaki koren polinoma P, višestrukosti k, važi da je i koren polinoma Q, ali višestrukosti veće ili jednake k, tada polinom P deli polinom Q.*

$P = (x-5)^2(x-3) \mid (x-5)^3(x-3)(x+7) = Q$

Koja je teorema analogna ovoj teoremi u prstenu celih brojeva?

Na primer, svi koreni polinoma x^2+x+1 jesu $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ i $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$, a istovremeno i koreni polinoma $x^{10}+x^5+1$, pa x^2+x+1 deli polinom $x^{10}+x^5+1$ jer su $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ i $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ jednostruki koreni polinoma x^2+x+1. Deljenjem se lako dobija da je $x^{10}+x^5+1=(x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$. Napomena: $x=e^{i\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow (x^{10}=x \wedge x^5=x^2)$.

Teorema 8.39 *Svaki polinom P_n n-tog stepena ima najviše n korena.*

Dokaz Polinom nultog stepena očevidno ima „nula" korena pa je tvrđenje tačno za $n=0$. Ako P_n nema korena, dokaz je završen. Ako je $n>0$ i P_n ima bar jedan koren α, dokaz se izvodi indukcijom po n. Za $n=1$ sledi da polinom $P_1=a_0+a_1t$ ima tačno jedan koren $-a_1^{-1}a_0$, jer jednačina $a_0+a_1x=0$ ima tačno jedno rešenje u polju F, tj. tvrđenje je tačno. Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za $n-1$ i dokažimo da je tačno za n. Kako je $P_n=(t-\alpha)Q_{n-1}$ zbog teoreme 8.35 i kako je po induktivnoj pretpostavci $dg(Q_{n-1})=n-1$, na osnovu induktivne pretpostavke sledi da Q_{n-1} ima najviše $n-1$ korena, a iz jednakosti $P_n=(t-\alpha)Q_{n-1}$ tada sledi da P_n ima najviše n korena. □

Teorema 8.40 *Polinom P nad beskonačnim poljem F je nula polinom akko je svaki element polja F koren polinoma P.*

Drugim rečima, polinom je nula polinom, nad beskonačnim poljem, ako i samo ako je njegova polinomska funkcija nula funkcija, tj. polinomska funkcija je nula funkcija akko su svi njeni koeficijenti jednaki nuli (Kaže se još i polinom je identički jednak nuli).
Na primer za $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ važi:

$(\forall x\in\mathbb{R})f(x)=c+bx+ax^2=0 \;\Leftrightarrow\; c=0 \;\wedge\; b=0 \;\wedge\; a=0.$

Dokaz Neka su svi elementi polja F koreni polinoma P. Za svaki polinom P važi da je $P=0 \vee dg(P)=n$. Na osnovu teoreme 8.39 sledi: ako je $dg(P)=n$, tada P ima najviše n korena, što je kontradikcija uslovu da je svaki element polja F koren polinoma P, jer F nije konačno polje. Znači, mora biti $P=0$. Obratno je očevidno. □

Važi i teorema da je polinom P n-tog stepena nad beskonačnim poljem F jednoznačno određen davanjem njegovih vrednosti u $n+1$ različitih tačaka. Dokaz je posledica teoreme o jednoznačnoj rešivosti kvadratnog sistema linearnih jednačina i teoreme o Vandermondovoj determinanti.

OVO NE VAŽI U KONAČNIM POLJIMA!

PR.: $\mathbb{Z}_3$, $X^2+2X=0$

Zadatak 8.41 *Naći realne brojeve a i b, takve da je njihova razlika jednaka datom broju α, a njihov proizvod jednak datom pozitivnom broju β. Dokazati da je* $\max\{a,b\}$ *koren polinoma* $f(x) = x^2 - |\alpha|x - \beta$. *Da li postoji bar još jedan normalizovani kvadratni polinom različit od f, takav da kakvi god bili brojevi a i b, sledi da je* $\max\{a,b\}$ *njegov koren?*

Rešenje: Sistem jednačina $a - b = \alpha \wedge ab = \beta > 0$ po nepoznatima a i b uvek ima dva rešenja: $(a_1, b_1) = \left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2}, \frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2}\right)$ i $(a_2, b_2) = \left(\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2}, \frac{-\alpha-\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2}\right)$. Kako je u slučaju $\alpha \geq 0$ $\max(a_1, b_1) = a_1$ i $\max(a_2, b_2) = a_2$, sledi da kvadratni normalizovani polinom čiji su koreni a_1 i a_2 glasi $f(x) = x^2 - \alpha x - \beta$, odnosno $f(x) = x^2 - |\alpha|x - \beta$. U slučaju $\alpha < 0$ je $\max(a_1, b_1) = b_1$ i $\max(a_2, b_2) = b_2$, sledi da traženi kvadratni normalizovani polinom čiji su koreni b_1 i b_2 iznosi $f(x) = x^2 + \alpha x - \beta$, to jest $f(x) = x^2 - |\alpha|x - \beta$.

Prema tome, f je **jedini** polinom takve osobine!

Teorema 8.42 *Ako je F konačno polje od m elemenata, a skupu $\mathcal{M}$ pripada samo nula polinom i svi polinomi nad poljem F stepena manjeg od m, tada je polinom $P \in \mathcal{M}$ nula polinom akko je svaki element polja F koren polinoma P.*

Dokaz Neka P ima za korene sve elemente polja F, odnosno neka P ima m korena. Kako je $P \in \mathcal{M}$, tj. $P = 0 \vee dg(P) < m$, sledi da je $P = 0$ jer je slučaj $dg(P) < m$ nemoguć zbog teoreme 8.39 i uslova da P ima m korena. Obratno je očevidno. □

Teorema 8.43 *Polinomi $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ i $(b_0, b_1, \ldots, b_m)$ nad beskonačnim poljem F jednaki su akko su njihove polinomske funkcije jednake.* = 8.40.

Drugim rečima, za polinomske funkcije $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisane sa $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) = c_1 + b_1 x + a_1 x^2$ i $g(x) = c_2 + b_2 x + a_2 x^2$ važi da je $f = g \Leftrightarrow c_1 = c_2 \wedge b_1 = b_2 \wedge a_1 = a_2$ odnosno
$(\forall x \in \mathbb{R}) c_1 + b_1 x + a_1 x^2 = c_2 + b_2 x + a_2 x^2 \Leftrightarrow (c_1, b_1, a_1) = (c_2, b_2, a_2)$.

Dokaz Neka su $P = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ i $Q = (b_0, b_1, \ldots, b_m)$. Ako je $P = Q$, onda je očevidno da je $\psi(P) = \psi(Q)$. Pretpostavimo da je $n \leq m$, što ne umanjuje opštost dokaza. Neka je sada $\psi(P) = \psi(Q)$, što znači

$$(\forall x \in F)\ \psi(P)(x) = \psi(Q)(x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\forall x \in F)\ a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m \Leftrightarrow$$
$$(\forall x \in F)\ a_0 - b_0 + (a_1 - b_1)x + \ldots + (a_n - b_n)x^n - b_{n+1}x^{n+1} - \ldots - b_m x^m = 0,$$

a odavde, zbog teoreme 8.40, sledi da je njemu odgovarajući polinom

$$(a_0 - b_0,\ a_1 - b_1,\ \ldots,\ a_n - b_n,\ -b_{n+1}, \ldots,\ -b_m)$$

nula polinom, pa je $n = m$ (u protivnom, vodeći koeficijent b_m polinoma

Q bio bi nula, što je u suprotnosti s definicijom polinoma) i $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$ to jest $P = Q$. $\square$

Znači, ψ je bijekcija i izomorfizam domena integriteta $(F[t], +, \cdot)$ i $(\mathcal{P}ol(F), +, \cdot)$ kada je F beskonačno polje, pa će se u tom slučaju $\psi(P)$ označavati samo sa P.

Teorema 8.44 *Polinomi P i Q stepena manjeg od m, nad poljem F od m elemenata jednaki su akko su funkcije $\psi(P)$ i $\psi(Q)$ jednake, odnosno $(\forall x \in F)\ \psi(P)(x) = \psi(Q)(x)$.*

Dokaz je analogan dokazu prethodne teoreme.

Sada će se nenula polinomi stepena različitog od nule klasifikovati na svodljive i nesvodljive, tj. nula polinom i polinomi nultog stepena (konstantni polinomi) nisu ni svodljivi ni nesvodljivi. Slede tri ekvivalentne definicije (teoreme?) svodljivosti odnosno nesvodljivosti polinoma nad nekim poljem.
Nula polinom i polinomi stepena nula nisu ni svodljivi ni nesvodljivi!

Definicija 8.45 *Polinom je* **svodljiv** *nad nekim poljem akko je jednak proizvodu polinoma stepena nižih od njegovog.*

Teorema 8.46 *Polinom je* **svodljiv** *nad nekim poljem akko je jednak proizvodu polinoma stepena većih od nule.*

Definicija 8.47 *Polinom stepena većeg od nule koji nije svodljiv, naziva se* **nesvodljiv** *polinom.*

Teorema 8.48

Polinom stepena većeg od nule **nesvodljiv** *je akko* **ne postoji polinom** *stepena većeg od nule koji ga deli.*

U prethodnoj teoremi i definicijama podrazumeva se da su svi polinomi nad istim poljem.

Koja je definicija analogna ovim definicijama u prstenu celih brojeva, odnosno monoidu (asocijativnom grupoidu s neutralnim elementom) prirodnih brojeva?

Ekvivalentnost teoreme 8.46 i definicije 8.45 (tj. svodljivosti), sledi iz teoreme 8.14, koja kaže da ako su P i Q nenula polinomi, tada je $dg(PQ) =$

$dg(P) + dg(Q)$, što znači da ako su $dg(P) > 0$ i $dg(Q) > 0$, onda su sigurno i $dg(P) < dg(PQ)$ i $dg(Q) < dg(PQ)$, jer su svi iz $\mathbb{N}$.

Očevidno je da su svi polinomi prvoga stepena nesvodljivi nad svakim poljem. Polinom $t^2 - 2$ svodljiv je nad poljem realnih brojeva jer je $t^2 - 2 = (t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2})$, ali nesvodljiv nad poljem racionalnih brojeva, dok je polinom $t^2 + 1$ nesvodljiv nad poljem realnih brojeva, a svodljiv nad poljem kompleksnih brojeva, jer je $t^2 + 1 = (t - i)(t + i)$. Polinom $t^3 + t + 1$ svodljiv je nad poljem kompleksnih i realnih brojeva, svodljiv je i nad poljem $\mathbb{Z}_3$, a, nesvodljiv je na primer, nad poljima $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$ itd. (Videti teoreme 6.7 i 8.49).

Teorema 8.49 *Neka je $P \in F[t]$ polinom drugog ili trećeg stepena. Tada je polinom P svodljiv nad poljem F akko polinom P ima bar jedan koren u polju F.* $\Rightarrow$ SAMO ZA 2. i 3., $\Leftarrow$ UVEK

Dokaz ($\Rightarrow$) Ako je polinom P drugog ili trećeg stepena i svodljiv nad poljem F, tada je deljiv linearnim polinomom zbog 8.45 i 8.14 ($PQ \neq 0 \Rightarrow dg(PQ) = dg(P) + dg(Q)$) i činjenice da su jedini način predstavljanja dvojke i trojke kao zbira prirodnih brojeva: 2=1+1, 3=1+2 i 3=2+1. Kako P ima linearni faktor, a svaki linearni polinom ima jedan koren, sledi da polinom P ima bar jedan koren.
($\Leftarrow$) Ako P ima koren α, zbog teoreme 8.35 tada sledi da je $t - \alpha$ faktor polinoma P, to jest P je svodljiv. □

Teorema 8.50 *Svaki normalizovani svodljiv polinom može se uvek na* jedinstven *način napisati kao proizvod normalizovanih nesvodljivih polinoma čiji redosled nije bitan. (Naravno, sve nad istim poljem.)*

Koja je teorema analogna ovoj teoremi u prstenu celih brojeva?

Primer 8.51 .
Kako su $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{5} + 1)(x^2 - 2x\cos\frac{4\pi}{5} + 1)$ i $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 - 2x\frac{\sqrt{5}-1}{4} + 1)(x^2 - 2x\frac{-\sqrt{5}-1}{4} + 1)$, da li to protivreči prethodnoj teoremi, jer sva četiri kvadratna polinoma nesvodljivi su nad poljem realnih brojeva? Videti zadatak 8.60 a).

Teoreme koje su do sada obrađene važe za proizvoljna polja F. Sledi nekoliko teorema koje se odnose na polja kompleksnih, realnih i racionalnih brojeva.

Evo jedne važne teoreme koja se daje bez dokaza. Gaus je dao četiri dokaza ove teoreme (1799, 1815, 1816. i 1849. godine).

Teorema 8.52 *(Osnovni stav algebre). Svaki polinom, stepena različitog od nule, nad poljem kompleksnih brojeva ima bar jedan koren u tom polju.*

Teorema 8.53 *Svaki polinom* $P_n = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \ldots + a_nt^n$ *, n-tog stepena, za* $n > 0$*, nad poljem kompleksnih brojeva može se napisati u obliku*

$$P = a_n(t - t_1)(t - t_2) \ldots (t - t_n),$$

gde je t polinom $(0, 1)$*, a* $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *i* a_n *kompleksni brojevi, odnosno konstantni polinomi.*

Dokaz Na osnovu teoreme 8.52, polinom P ima bar jedan koren t_1 iz skupa kompleksnih brojeva, pa je zbog 8.35 $P = (t - t_1)P_{n-1}$, gde je P_{n-1} polinom stepena $n - 1$. Sada se na polinom P_{n-1} primeni 8.52 i dobija $P_n = (t-t_1)(t-t_2)P_{n-2}$. Nastavkom ovog postupka dobija se da je $P_n = (t-t_1)(t-t_2) \ldots (t - t_{n-1})P_1$. Kako se svaki linearni polinom može napisati u obliku $a(t - t_n)$, zamenom $P_1 = a(t - t_n)$ u prethodnu jednakost i izjednačavanjem koeficijenata uz t^n dobija se da je $a = a_n$, odnosno tvrdnju teoreme. □

Kao što je rečeno $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ je n-torka brojeva koji su koreni polinoma P i ako je k broj pojavljivanja korena t_i u toj n-torci, tada se kaže da je t_i koren reda k za polinom P. Videti 8.36. $(x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) = x^2 - 2x\,Re(\alpha) + |\alpha|^2$

Teorema 8.54 *Ako su P polinom nad poljem realnih brojeva (tj. poliom čiji kojeficijenti su realni brojevi) i* α *koren polinoma P, tada je i konjugovani broj* $\overline{\alpha}$ *koren polinoma P.*

Dokaz Ako je a realan broj, jasno je da je tada $a = \overline{a}$. Kako su strukture polinoma i polinomskih funkcija izomorfne nad beskonačnim poljem (8.43), onda je opravdano, samo u tom slučaju, da se $\psi(P)$ kraće piše samo sa P, odnosno $\psi(P)(x) = P(x)$ za svako x iz tog beskonačnog polja. Neka je

$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = a_n(x - x_1) \ldots (x - x_n)$, tada je

$\overline{P(x)} = a_0 + a_1\overline{x} + a_2\overline{x}^2 + \ldots + a_n\overline{x}^n = P(\overline{x}) = a_n(\overline{x} - x_1) \ldots (\overline{x} - x_n)$,

pa je $P(x) = \overline{\overline{P(x)}} = \overline{a_n(\overline{x} - x_1) \ldots (\overline{x} - x_n)} = a_n(x - \overline{x}_1) \ldots (x - \overline{x}_n)$, odakle je očevidno da $P(\alpha) = 0$ implicira $P(\overline{\alpha}) = 0$. Videti 7.4 i 7.6. □

Teorema 8.55 *Svaki polinom* $P = a_0 + a_1t + \ldots + a_nt^n$ *nad poljem realnih brojeva, može se napisati u obliku proizvoda polinoma stepena nižih od 3, čiji su koeficijenti realni brojevi.*

Dokaz Na osnovu teoreme 8.53 polinom P može se napisati u obliku $P = a_n(t-t_1)(t-t_2)\dots(t-t_n)$, gde su $t_1, t_2, \dots, t_n$ kompleksni koreni polinoma P. Međutim, ako je α koren polinoma P nad poljem realnih brojeva, tada je i $\overline{\alpha}$ koren polinoma P, pa ako se pomnože polinomi $(t-\alpha)$ i $(t-\overline{\alpha})$, dobija se polinom $t^2 - 2R_e(\alpha)t + |\alpha|^2$ čiji su koeficijenti realni. Nastavi li se taj postupak dokle god u polinomu $P = a_n(t-t_1)(t-t_2)\dots(t-t_n)$ ima kompleksnih brojeva koji nisu realni, očevidno će se dobiti polinom P u obliku koji tvrdi teorema

$$P = a_n(t^2+p_1t+q_1)\dots(t^2+p_kt+q_k)(t-t_{r_1})\dots(t-t_{r_m}),$$

gde su $p_i, q_i, t_{r_j} \in \mathbb{R}$ i $t_{r_j} \in \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ za svako $i = 1, 2, \dots, k$ i $j = 1, 2, \dots, m$. □

Zaokružiti tačan odgovor:

UVEK COMP. (NE MOGU BITI REAL)

Test 8.56 *Ako su* $f \in \mathbb{R}[x]$, $f(e^{i\alpha}) = 0$ *i* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, *tada:*
a) $x - e^{i\alpha} \big| f(x)$; **b)** $x^2 - x\cos\alpha + 1 \big| f(x)$; **c)** $x^2 + x\cos\alpha + 1 \big| f(x)$;
d) $x - e^{-i\alpha} \big| f(x)$; **e)** $x^2 + 2x\cos\alpha + 1 \big| f(x)$; **f)** $x^2 - 2x\cos\alpha + 1 \big| f(x)$.

I COMP, I REAL

Test 8.57 *Ako su* $f \in \mathbb{R}[x]$, $f(e^{i\alpha}) = 0$ *i* $\alpha \in \mathbb{R}$, *tada:*
a) $x - e^{i\alpha} \big| f(x)$; **b)** $x^2 - x\cos\alpha + 1 \big| f(x)$; **c)** $x^2 + x\cos\alpha + 1 \big| f(x)$;
d) $x - e^{-i\alpha} \big| f(x)$; **e)** $x^2 + 2x\cos\alpha + 1 \big| f(x)$; **f)** $x^2 - 2x\cos\alpha + 1 \big| f(x)$.

Videti teoreme 8.38 i 8.54.

Zadatak 8.58 *Odrediti presek skupa stepena svih nesvodljivih polinoma i skupa stepena svih svodljivih polinoma nad poljem realnih brojeva.*

$\{1,2,3\} \cap \{2,3,4,\dots\} = \{2\}$

Zadatak 8.59 *Odrediti presek skupa stepena svih nesvodljivih polinoma i skupa stepena svih svodljivih polinoma nad poljem kompleksnih brojeva.*

$\{1\} \cap \{2,3,4,\dots\} = \emptyset$

Zadatak 8.60 *Dokazati da nad poljem realnih brojeva važi:*

a) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{5} + 1)(x^2 - 2x\cos\frac{4\pi}{5} + 1)$. *Kako je* $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + \frac{1}{2}x + 1)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}x\right)^2 =$
$= (x^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}x + 1)(x^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}x + 1) =$
$= (x^2 - 2x\frac{\sqrt{5}-1}{4} + 1)(x^2 - 2x\frac{-\sqrt{5}-1}{4} + 1)$, *to iz prvog i poslednjeg reda, na osnovu teoreme 8.50 sledi* $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$;

b) $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=\frac{1}{x-1}\prod_{k=-3}^{3}(x-e^{i\frac{2k\pi}{7}})$
$=(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{7}+1)(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{7}+1)(x^2-2x\cos\frac{6\pi}{7}+1)$.
Izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće stepene dobija se: $\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$,
$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$, $\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}=\frac{1}{8}$.
Iz ove tri jednakosti sledi rezultat pod f);

c) $x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1=\prod_{k=-3}^{2}(x-e^{i\frac{(2k+1)\pi}{7}})$
$=(x^2-2x\cos\frac{\pi}{7}+1)(x^2-2x\cos\frac{3\pi}{7}+1)(x^2-2x\cos\frac{5\pi}{7}+1)$
Izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće stepene dobija se: $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}=-\frac{1}{2}$,
$\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}=-\frac{1}{8}$.
Iz ove tri jednakosti sledi rezultat pod g);

d) $x^{2n}-1=(x^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)$;

e) Smenom $x^5=t$ *lako se dobijaju svi koreni polinoma* $f(x)$, *pa je* $f(x)=x^{10}+x^5+1=\prod_{k=0}^{4}\left(x^2-2x\cos\frac{6k+2}{15}\pi+1\right)$;

f) Vijetovim formulama ili, još lakše, smenom $2x=\frac{1}{t}+t$ *dobija se* $8x^3+4x^2-4x-1=8(x-\cos\frac{2\pi}{7})(x-\cos\frac{4\pi}{7})(x-\cos\frac{6\pi}{7})$;

g) Vijetovim formulama ili, još lakše, smenom $2x=\frac{1}{t}+t$ *dobija se* $8x^3-4x^2-4x+1=8(x-\cos\frac{\pi}{7})(x-\cos\frac{3\pi}{7})(x-\cos\frac{5\pi}{7})$;

h) $z^3-7z^2+14z-7=0\Leftrightarrow z\in\{4\cos^2\frac{\pi}{14},4\cos^2\frac{3\pi}{14},4\cos^2\frac{9\pi}{14}\}$;

i) $x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$;

j) $x^4+1=(x^2+1)^2-(x\sqrt{2})^2=(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)$;

k) Množenjem rezultata pod f) i pod e) dobija se $64x^6-80x^4+24x^2-1=64\prod_{k=1}^{6}\left(x-\cos\frac{k\pi}{7}\right)$;

Rešenje

a) Kako je $P(x)=x^4+x^3+x^2+x+1=\frac{x^5-1}{x-1}$ i $P(x)=0\ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\ (x^5=1\ \wedge\ x\neq 1)\ \Leftrightarrow\ x\in\{e^{i\frac{2\pi}{5}},e^{i\frac{-2\pi}{5}},e^{i\frac{4\pi}{5}},e^{i\frac{-4\pi}{5}}\}$, pa je
$x^4+x^3+x^2+x+1=(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{5}+1)(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{5}+1)$.

d) Skup svih korena polinoma $P(x)=x^{2n}-1$ je
$\{-1,1\}\cup\left\{e^{i\frac{k\pi}{n}}|k\in\{1,2,\ldots,n-1\}\right\}\cup\left\{e^{-i\frac{k\pi}{n}}|k\in\{1,2,\ldots,n-1\}\right\}$

Teorema 8.61 *Vijetove formule. Ako je $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ uređena n-torka korena polinoma $P = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$ stepena n nad nekim poljem F, pri čemu se svaki koren t_i u n-torci pojavljuje* tačno onoliko puta *koliko iznosi njegova višestrukost (videti 8.36), što je, po Bezuovoj teoremi, ekvivalentno sa $P = a_n(t-t_1)\cdot(t-t_2)\cdot\ldots\cdot(t-t_n)$, tada važi:*

$$\begin{aligned}
t_1 + t_2 + \ldots + t_n &= \sum_{i=1}^{n} t_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\
t_1t_2 + t_1t_3 + \ldots + t_{n-1}t_n &= \sum_{1\le i<j\le n} t_i t_j = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\
&\vdots \\
t_1t_2\ldots t_k + \ldots + t_{n-k+1}\ldots t_n &= \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} t_{i_1}t_{i_2}\ldots t_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n} \\
&\vdots \\
t_1t_2\ldots t_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n}
\end{aligned}$$

gde su $i, j, i_1, i_2, \ldots, i_k$ elementi skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Dokaz Kako su $t_1, t_2, \ldots, t_n$ koreni polinoma P, na osnovu 8.35 sledi

$$P = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0 = a_n(t-t_1)(t-t_2)\ldots(t-t_n),$$

a posle množenja i izjednačavanja koeficijenata uz odgovarajuće stepene, odatle sledi tvrđenje teoreme. □

Primer 8.62 *Ako su $a_4 \neq 0$ i*
$a_4t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 = a_4(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)(t-t_4)$ *, tada je*

$$\begin{aligned}
t_1 + t_2 + t_3 + t_4 &= -\frac{a_3}{a_4} \\
t_1t_2 + t_1t_3 + t_1t_4 + t_2t_3 + t_2t_4 + t_3t_4 &= \frac{a_2}{a_4} \\
t_1t_2t_3 + t_1t_2t_4 + t_1t_3t_4 + t_2t_3t_4 &= -\frac{a_1}{a_4} \\
t_1t_2t_3t_4 &= \frac{a_0}{a_4}.
\end{aligned}$$

Zadatak 8.63 *Da li je $2\cos\frac{k\pi}{9}$ koren polinoma $x^3 - 3x - 1$ za svaki prost broj k veći od 3?*

Rešenje Da bi se pojavili brojevi $\cos\frac{5\pi}{9}$, $\cos\frac{7\pi}{9}$, ... treba naći skup svih korena polinoma $z^9+1=0$, tj. polinoma $(z^3+1)(z^6-z^3+1)$. Skup korena polinoma z^9+1 je $\{-1, e^{\pm i\frac{\pi}{9}}, e^{\pm i\frac{3\pi}{9}}, e^{\pm i\frac{5\pi}{9}}, e^{\pm i\frac{7\pi}{9}}\}$, a skup korena polinoma z^6-z^3+1 je $\{e^{\pm i\frac{\pi}{9}}, e^{\pm i\frac{5\pi}{9}}, e^{\pm i\frac{7\pi}{9}}\}$.

Sledi da je $z^6-z^3+1=(z^2-2z\cos\frac{\pi}{9}+1)(z^2-2z\cos\frac{5\pi}{9}+1)(z^2-2z\cos\frac{7\pi}{9}+1)$.

Izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće stepene u prethodnoj jednakosti dobija se da je: $\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}=0$, $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9}=-\frac{3}{4}$, $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9}=\frac{1}{8}$. Na osnovu Vijetovih pravila sledi da su $\cos\frac{\pi}{9}, \cos\frac{5\pi}{9}, \cos\frac{7\pi}{9}$ koreni polinoma $8y^3-6y-1$, pa smenom $2y=x$ sledi da su $2\cos\frac{\pi}{9}, 2\cos\frac{5\pi}{9}, 2\cos\frac{7\pi}{9}$ koreni polinoma x^3-3x-1. Jasno je da $2\cos\frac{k\pi}{9}$ jeste element skupa $\{2\cos\frac{\pi}{9}, 2\cos\frac{5\pi}{9}, 2\cos\frac{7\pi}{9}\}$ za svaki prost broj k veći od 3.

Primer 8.64 *Neka je $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ polinom nad poljem realnih brojeva i neka je skup* **svih** *njegovih korena $\{1,2\}$. Tada skupovi svih mogućnosti za a, b i c iznose $a\in\{\quad\}$, $b\in\{\quad\}$ i $c\in\{\quad\}$.*

Rešenje: $a\in\{-4,-5\}$, $b\in\{5,8\}$ i $c\in\{-2,-4\}$.

~~**Zadatak 8.65**~~ *Neka su* $1, 2$ *i* 3 **svi** *koreni polinoma P koji je definisan sa $P(x)=x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ nad poljem $\mathbb{C}$. Odrediti koeficijent uz x^4 u polinomu $P(x)$.*

Rešenje: $a_4\in\{-8,-9,-10,-11,-12\}$.

Zadatak 8.66 *Neka su $x_1,\dots,x_\ell$* **svi različiti** *koreni normalizovanog polinoma $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, čije su višestrukosti redom $k_1,k_2,\dots,k_\ell$.*
a) *U zavisnosti od x_j i k_j za $j\in\{1,\dots,\ell\}$ izraziti n, a_{n-1}, a_{n-2} i a_0.*
b) *U zavisnosti od ℓ izraziti a_0, a_{n-1}, a_{n-2} i n ako je $k_i=x_i=i$ za sve $i\in\{1,2,\dots,\ell\}$.*

Rešenje: a) $n=k_1+k_2+\dots+k_\ell$, $a_{n-1}=-k_1x_1-k_2x_2-\dots-k_\ell x_\ell$, $a_{n-2}=\frac{1}{2}(k_1x_1+k_2x_2+\dots+k_\ell x_\ell)^2-\frac{1}{2}(k_1x_1^2+k_2x_2^2+\dots+k_\ell x_\ell^2)$, $a_0=(-1)^n\cdot x_1^{k_1}\cdot x_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot x_\ell^{k_\ell}$. **b)** $a_0=(-1)^n\cdot 1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot \ell^\ell$, $a_{n-1}=-\frac{\ell\cdot(\ell+1)(2\ell+1)}{6}$, $a_{n-2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\ell\cdot(\ell+1)(2\ell+1)}{6}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\ell\cdot(\ell+1)}{2}\right)^2=\frac{(\ell-1)\ell^2(\ell+1)^2(\ell+2)}{18}$, $n=\frac{\ell\cdot(\ell+1)}{2}$. *U ovom slučaju $P(x)=(x-1)\cdot(x-2)^2\cdot\ldots\cdot(x-\ell)^\ell$.*

Da li važi isto rešenje ako je u tekstu zadatka umesto polja kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ polje realnih brojeva $\mathbb{R}$? Zašto?

Zadatak 8.67 *Neka je $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ n-torka svih korena polinoma $f(x)=x^n+x+1$ nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, pri čemu se svaki koren x_i u toj n-torci pojavljuje tačno onoliko puta kolika je njegova višestrukost (videti 8.36). Izračunati sumu $\sum_{i=1}^n\frac{x_i}{1+x_i}$.*

Rešenje: Skraćivanjem sa x_i sledi da je $\frac{x_i}{1+x_i}=\frac{1}{1+x_i^{-1}}$. Kako su x_i nule polinoma f, to su x_i^{-1} nule polinoma $g(x)=x^nf(x^{-1})=x^n(x^{-n}+x^{-1}+1)=1+x^{n-1}+x^n$. Kako su x_i^{-1} nule polinoma g, to su $1+x_i^{-1}$ nule polinoma $h(x)=g(x-1)=1+(x-1)^{n-1}+(x-1)^n$. Kako su $1+x_i^{-1}$ nule polinoma h, to su $(1+x_i^{-1})^{-1}$ nule polinoma

$$x^nh(x^{-1})=x^n\left(1+(x^{-1}-1)^{n-1}+(x^{-1}-1)^n\right)=$$

$$x^n\left(1+(\frac{1}{x}-1)^{n-1}+(\frac{1}{x}-1)^n\right)=x^n+x(1-x)^{n-1}+(1-x)^n.$$

Tražena suma brojeva $\sum_{i=1}^{n}(1+x_i^{-1})^{-1}$ jeste suma korena polinoma $x^n+x(1-x)^{n-1}+(1-x)^n$, gde se svaki koren u toj sumi pojavljuje tačno onoliko puta kolika je njegova višestrukost, a ona je po Vijetovim pravilima jednaka koeficijentu uz x^{n-1}, sa suprotnim znakom, u polinomu $x^n+x(1-x)^{n-1}+(1-x)^n$. Na osnovu binomne formule lako se vidi da traženi koeficijent odnosno tražena suma iznosi

$-\Big((-1)^n(n-1)+(-1)^{n-1}n\Big)=(-1)^n(-n+1+n)=(-1)^n.$

Ilustrovaćemo primerom kako se određuju višestruke nule korišćenjem Hornerove sheme.

Zadatak 8.68 *Polinom* $P=t^4-2t^3-t^2+3t+2$ *napisati po stepenima od* $t-2$.

Rešenje To će se uraditi pomoću Hornerove sheme.

2	1	-2	-1	3	2
	1	0	-1	1	$\boxed{4}$
	1	2	3	$\boxed{7}$	
	1	4	$\boxed{11}$		
	1	$\boxed{6}$			
	$\boxed{1}$				

U gornjem levom uglu tabele nalazi se koren polinoma $t-2$ to jest 2. Desno od njega redom su koeficijenti polinoma P, od najvišeg stepena do slobodnog člana. Koeficijent uz najviši stepen, to je ovde 1, uvek se prepisuje ispod samog sebe. Svi ostali brojevi tabele dobijaju se tako što se saberu broj koji je iznad njega i broj levo od njega prethodno pomnožen sa 2 (tj. broj iz levog gornjeg ugla tabele). Uokvireni brojevi predstavljaju koeficijente polinoma P po stepenima od $t-2$, odnosno

$$P=t^4-2t^3-t^2+3t+2=(t-2)^4+6(t-2)^3+11(t-2)^2+7(t-2)+4.$$

Kad bi gornji uokvireni broj umesto 4 bio 0, to bi značilo da je 2 koren polinoma P bar prvog reda. Kada bi i prvi i drugi uokvireni brojevi od gore bili nule, a treći od gore uokvireni broj različit od nule, tada bi broj 2 bio koren drugog reda itd.

Pomoću Hornerove sheme na ovaj način mogu se pronaći višestruki koreni ako su poznati koreni tog polinoma. Videti zadatak 8.72.

Drugi način za traženje višestrukih korena polinoma P nad poljem kompleksnih brojeva jeste pomoću izvoda njegove polinomske funkcije $(\psi(P))'$

i odgovarajućeg polinoma P'. Dvostruki koreni polinoma P zajednički su koreni polinoma P i P', koji nisu koreni polinoma P''. Napomenimo da su zajednički koreni nekih polinoma, koreni njihovog najvećeg zajedničkog delioca. Lako se dokazuje sledeća teorema.

Teorema 8.69 *Nula (koren) reda $k \geq 2$ polinoma P je nula (koren) reda $k-1$ polinoma P'. Broj α je koren reda k polinoma P ako i samo ako je α zajednički koren polinoma $P, P', P'', \ldots, P^{(k-1)}$ i α nije koren polinoma $P^{(k)}$.*

Dokaz Ako je α nula reda k polinoma P, to znači da je

$$P(x) = (x-\alpha)^k Q(x) \quad \text{gde je} \quad Q(\alpha) \neq 0.$$

Izračunati izvod leve i desne strane prethodne jednakosti.

$$P'(x) = (x-\alpha)^{k-1}(kQ(x) + (x-\alpha)Q'(x)),$$

odakle sledi da je α nula reda $k-1$ polinoma P'. Drugi deo tvrđenja teoreme posledica je prvog dela, koji je dokazan. □

Teorema 8.70 *Neka je $\frac{p}{q}$ racionalan broj, gde su p i q uzajamno prosti celi brojevi i neka su koeficijenti polinoma*

$$P = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$$

celi brojevi. Tada, ako je $\frac{p}{q}$ koren polinoma P, onda su $p|a_0$ i $q|a_n$.

Dokaz Kako je $\frac{p}{q}$ koren polinoma P, to je

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0 \tag{8.1}$$

$$a_n\frac{p^n}{q} + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 pq^{n-2} + a_0 q^{n-1} = 0 \tag{8.2}$$

$$a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots + a_1 q^{n-1} + a_0\frac{q^n}{p} = 0 \tag{8.3}$$

gde su jednakosti (8.2) i (8.3) dobijene iz jednakosti (8.1) množenjem redom sa q^{n-1} i $\frac{q^n}{p}$. Broj $a_n\frac{p^n}{q}$ mora biti ceo jer svi ostali sabirci u jednakosti (8.2) celi su brojevi. Kako je $a_n\frac{p^n}{q}$ ceo broj tada a_n mora biti deljiv sa q jer su p i q uzajamno prosti brojevi. Analogno se zaključuje da je a_0 deljiv sa p. □

Zadatak 8.71 *Neka je $P(t)$ polinom s realnim koeficijentima, neka su R_a i R_b redom ostaci pri deljenju polinoma $P(t)$ polinomima $t-a$ i $t-b$ i neka je $a \neq b$. Naći ostatak pri deljenju polinoma $P(t)$ polinomom $(t-a)(t-b)$. Da li važi isti rezultat ako su polinomi nad proizvoljnim poljem F?*

Rešenje Ostatak pri deljenju polinoma $P(t)$ kvadratnim polinomom $(t-a)(t-b)$ jeste polinom $kt+n$, za neke realne brojeve k i n, odnosno $P(t) = (t-a)(t-b)Q(t)+kt+n$, gde je $Q(t)$ neki polinom. Tada su

$$R_a = P(a) = (a-a)(a-b)Q(a)+ka+n,$$
$$R_b = P(b) = (b-a)(b-b)Q(b)+kb+n.$$

Iz $ka+n = R_a \wedge kb+n = R_b$ dobija se

$$kt+n = \frac{R_a - R_b}{a-b}t + \frac{aR_b - bR_a}{a-b}.$$

Zbog teoreme 8.34. isti rezultat važi i za polinome nad proizvoljnim poljem F.

Zadatak 8.72 *Naći sve vrednosti $\lambda \in \mathbb{C}$ za koje polinom $x^4+\lambda x+3$ ima višestruke korene u skupu kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$.*

Rešenje Neka je α višestruki koren polinoma $x^4+\lambda x+3$. Tada se dobija Hornerova shema

α	1	0	0	λ	3
	1	α	α^2	$\alpha^3+\lambda$	$\alpha^4+\lambda\alpha+3$
	1	2α	$3\alpha^2$	$4\alpha^3+\lambda$	

u kojoj zbog uslova zadatka mora biti $\alpha^4+\lambda\alpha+3=0$ i $4\alpha^3+\lambda=0$, odakle su $\alpha^4=1$ i $\lambda=-4\alpha^3$, odnosno $\alpha \in \{1,-1,i,-i\}$ i $\lambda \in \{-4,4,4i,-4i\}$.

Zadatak 8.73 *Dokazati da postoji beskonačno mnogo polja nad kojima je svodljiv polinom t^7+t^2+1.*

Rešenje Primetimo da nad poljem kompleksnih brojeva za $t = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ sledi da je $t^7 = t$. To znači da je polinom t^7+t^2+1 deljiv sa $t+t^2+1$. Sada se lako dobija da je

$$t^7+t^2+1 = \underbrace{(t^2+t+1)}_{(t-e^{\frac{2\pi}{3}i})\cdot(t-e^{-\frac{2\pi}{3}i})}(t^5-t^4+t^2-t+1).$$

Ova faktorizacija očevidno važi za sve polinome posmatrano nad bilo kojim konačnim poljem $(\{0,1,...,p-1\},+,\cdot)$, gde je p prost broj i pri čemu je $-1=p-1$. Očevidno je da ova faktorizacija važi i nad bilo kojim poljem, ali i nad prstenom celih brojeva.

Zadatak 8.74 *Ispitati za koje je sve vrednosti nenegativnog celog broja m polinom $f(x)=(x+1)^m-x^m-1$ nad poljem $\mathbb{R}$ deljiv polinomom*
a) $(x^2+x+1)^2$; *b)* $(x^2+x+1)^3$.

Rešenje

a) Polinom $(x^2+x+1)^2$ ima dvostruke korene $e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$ koji moraju biti bar dvostruki koreni polinoma f (*videti* 8.38, 8.54 *i* 8.69), što znači da $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ mora biti koren polinoma f i f'. Znači
$f(e^{i\frac{2\pi}{3}})=(e^{i\frac{2\pi}{3}}+1)^m-(e^{i\frac{2\pi}{3}})^m-1=(e^{i\frac{\pi}{3}}2\cos\frac{\pi}{3})^m-e^{i\frac{2m\pi}{3}}-1=$
$e^{i\frac{m\pi}{3}}-(e^{i\frac{m\pi}{3}})^2-1=0\Leftrightarrow e^{i\frac{m\pi}{3}}=e^{\pm i\frac{\pi}{3}}\Leftrightarrow\frac{m\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\Leftrightarrow m=6k\pm1$. S druge strane
$f'(e^{i\frac{2\pi}{3}})=m(e^{i\frac{2\pi}{3}}+1)^{m-1}-me^{i\frac{2\pi}{3}(m-1)}=me^{i\frac{(m-1)\pi}{3}}-me^{i\frac{2\pi(m-1)}{3}}=0$
$\Leftrightarrow\frac{(m-1)\pi}{3}=\frac{2\pi(m-1)}{3}-2k\pi\Leftrightarrow m-1=2m-2-6k\Leftrightarrow m=6k+1$.
Polinom $(x^2+x+1)^2$ deli f akko je $m=6k+1$.

b) Ako je $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ koren polinoma f i f', tada je $m=6k+1$. Isto tako, ako je $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ koren polinoma f'', tada mora biti $m=6k+2$, što znači da polinomi $(x^2+x+1)^3$, f, f' i f'' nemaju zajednički koren, pa polinom f nije deljiv sa $(x^2+x+1)^3$ ni za jedno m.

Zadatak 8.75 *Ako je $P(x)=x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1$ polinom nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$, tada je*
$P(x)=(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{15}+1)(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{15}+1)$
$(x^2-2x\cos\frac{8\pi}{15}+1)(x^2-2x\cos\frac{14\pi}{15}+1)$. *Dokazati.*

Rešenje Videti 8.60 odnosno koristiti identitet
$$x^{10}+x^5+1=(x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1).$$

Zadatak 8.76 *Dokazati da je*

$$x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1\geq$$

$$(1-\cos^2\frac{2\pi}{15})(1-\cos^2\frac{4\pi}{15})(1-\cos^2\frac{8\pi}{15})(1-\cos^2\frac{14\pi}{15})$$

Rešenje $f(x)=x^2-2x\cos\frac{2\pi}{15}+1\geq1-\cos^2\frac{2\pi}{15}$, *jer teme parabole f njen je minimum.*

Zadatak 8.77 *Dokazati da je*

$$\sqrt{x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1} > \sin\frac{\pi}{15}\sin\frac{2\pi}{15}\sin\frac{4\pi}{15}\sin\frac{8\pi}{15}.$$

Zadatak 8.78 *Da li je polinom* $P(x) = x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1$ *deljiv polinomom* $x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{15} + 1$*?*

Zadatak 8.79 *Da li polinom* $P(x) = x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1$ *ima realnih korena?*

Zadatak 8.80 *Faktorisati polinom* $P(x) = x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$ *nad poljem:* **a)** *realnih brojeva,* **b)** *racionalnih brojeva:*

a) $x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{5} + 1)(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{5} + 1)$
$(x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{5} + 1)(x^2 - 2x\cos\frac{4\pi}{5} + 1)$

b) Prvo rešenje

$P(x) = x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + x^2 + 1)^2 - (x^3 + x)^2 = \ldots$
$=(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1).$

Drugo rešenje $P(x) = \frac{x^{10}-1}{x^2-1} = \frac{1}{x^2-1}(x^5 - 1)(x^5 + 1) =$
$\frac{1}{x^2-1}(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) =$
$=(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1).$

~~**Zadatak 8.81**~~ *Ako jednačina* $f(x) = x^3 + px + q = 0$ *ima tri realna i različita rešenja za* $p, q \in \mathbb{R}$*, tada je* $4p^3 + 27q^2 < 0$*. Dokazati. Napomena:* $D = -4p^3 - 27q^2$ *naziva se diskriminanta polinoma* f*.*

$$\rho_1 e^{\varphi_1} = \rho_2 e^{\varphi_2} \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2 \wedge \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$$

Poglavlje 9

KONSTRUKCIJA POLJA

Bilo koje konačno polje, izuzev polja $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$, može se konstruisati polazeći od skupa polinoma $F[t]$ nad nekim poljem F i definisanjem neke relacije ekvivalencije u skupu $F[t]$, koja je i kongruencija s obzirom na operacije $+$ i $\cdot$. Faktor struktura, tako dobijena, gde su njene operacije definisane kao u teoremi 5.32, biće to polje (odnosno polje izomorfno tom polju).

Polazeći od polja $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$, za svaki prost broj p konstruišu se sva ostala konačna polja!

Teorema 9.1 *Relacija $\equiv_P$ definisana u skupu svih polinoma $F[t]$ kao*

$$(\forall Q, S \in F[t])\ \ Q \equiv_P S \ \Leftrightarrow\ P | Q - S$$

jeste kongruencija u odnosu na sabiranje i množenje polinoma, gde je P neki nenula polinom iz $F[t]$.

Dokaz

Znači, Q i S su u relaciji $\equiv_P$ ako i samo ako je njihova razlika deljiva sa P, to jest akko polinomi Q i S imaju iste ostatke pri deljenju polinomom P.

Relacija je refleksivna jer je $Q \equiv_P Q \Leftrightarrow P|Q-Q \Leftrightarrow P|0 \Leftrightarrow$ tačno. Simetričnost sledi iz $Q \equiv_P S \Rightarrow P|Q-S \Rightarrow P|S-Q \Rightarrow S \equiv_P Q$. Relacija je tranzitivna jer $(Q \equiv_P S \wedge S \equiv_P R) \Rightarrow (P|Q-S \wedge P|S-R) \Rightarrow P|Q-R \Rightarrow Q \equiv_P R$. Relacija $\equiv_P$ jeste relacija ekvivalencije. Relacija $\equiv_P$ je kongruencija u odnosu na sabiranje i množenje polinoma, jer je $(Q \equiv_P S \wedge R \equiv_P T) \Rightarrow (P|(Q-S) \wedge P|(R-T)) \Rightarrow P|((Q+R)-(S+T)) \Rightarrow Q+R \equiv_P S+T$ kao i $(Q \equiv_P S \wedge R \equiv_P T) \Rightarrow (P|Q-S \wedge P|R-T) \Rightarrow (P|(QR-SR) \wedge P|(SR-ST)) \Rightarrow P|(QR-ST) \Rightarrow QR \equiv_P ST$. Klasa ekvivalencije, s obzirom na relaciju $\equiv_P$ kojoj pripada polinom Q, označiće se sa $[Q]$, a faktor skup sa $F[t]/_{\equiv_P}$. □

Teorema 9.2 *Uređena trojka $(F[t]/_{\equiv_P}, +, \cdot)$ komutativni je prsten s jedinicom, gde su operacije $+$ i $\cdot$ definisane sa*

$$(\forall Q, S \in F[t]) \qquad [Q]+[S]=[Q+S] \qquad i \qquad [Q][S]=[QS].$$

Dokaz Operacije $+$ i $\cdot$ su logički dobro definisane zbog teorema 5.32 i 9.1. Asocijativnost operacija $+$ i $\cdot$ sledi iz $([Q]+[R])+[S]=[Q+R]+[S]=[(Q+R)+S]=[Q+(R+S)]=[Q]+[R+S]=[Q]+([R]+[S])$ i $([Q][R])[S]=[QR][S]=[(QR)S]=[Q(RS)]=[Q][RS]=[Q]([R][S])$, gde su korišćene definicija operacija u skupu $F[t]/_{\equiv_P}$ i asocijativnost operacija $+$ i $\cdot$ u skupu polinoma $F[t]$. Analogno se dokazuju komutativnost operacija $+$ i $\cdot$ i distributivnost operacije $\cdot$ u odnosu na operaciju $+$ skupa $F[t]/_{\equiv_P}$. Neutralni element za operaciju $+$ jeste $[0]$, odnosno klasa kojoj pripadaju *svi polinomi deljivi sa P* koja se može označavati i sa $[P]$, pa je znači $0=[0]=[P]$. Neutralni element multiplikativne operacije jeste $[1]$ jer $[1][Q]=[1\cdot Q]=[Q]$. Inverzni element, s obzirom na operaciju $+$ uvek postoji jer je $[Q]+[-Q]=[Q+(-Q)]=[0]=[P]=(P)=0$. □

Prirodno pitanje koje se sada postavlja jeste da li za neke polinome $P \in F[t]$ prsten $(F[t]/_{\equiv_P}, +, \cdot)$ jeste polje.

Teorema 9.3 *Ako su F konačno polje i P nesvodljiv polinom, tada je $(F[t]/_{\equiv_P}, +, \cdot)$ polje.*

Dokaz U jednoj klasi faktor skupa $F[t]/_{\equiv_P}$ nalaze se svi polinomi koji imaju isti ostatak pri deljenju polinomom P, pa je i sam taj ostatak element te klase. Kako je svaka klasa ekvivalencije jednoznačno određena bilo kojim svojim elementom, to ćemo se dogovoriti da svaku klasu reprezentujemo, zapisujemo tim njenim ostatkom. To znači da ako je polinom $P = a_0 + a_1t + \ldots + a_nt^n$ n-tog stepena, onda je faktički konstruisana bijekcija koja svakoj klasi pridružuje pomenuti ostatak pri deljenju sa P odnosno polinom $R = b_0 + b_1t + \ldots + b_kt^k$ gde je $k \leq n-1$. Zbog toga će broj elemenata faktor skupa $F[t]/_{\equiv_P}$ biti jednak broju svih polinoma $R = b_0 + b_1t + \ldots + b_kt^k$, gde je $k \leq n-1$ i gde su $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ elementi skupa F. Ako je F konačan skup sa p elemenata, tada će skup svih polinoma $R = b_0 + b_1 + \ldots + b_kt^k$, gde je $k \leq n-1$, imati p^n elemenata (varijacije od p elemenata n-te klase), to jest skup $F[t]/_{\equiv_P}$ je konačan i ima p^n elemenata (klasa).

Kako je $(F[t]/_{\equiv_P}, +, \cdot)$ konačan komutativni prsten sa jedinicom, treba još samo dokazati ne postojanje delitelja nule, jer će tada trojka $(F[t]/_{\equiv_P}, +, \cdot)$ biti konačni domen integriteta, a zbog teoreme 6.6 biće polje. Ne postojanje delitelja nule sledi iz $0 = [Q][S] = [QS] \Rightarrow P|QS \Rightarrow P|Q \vee P|S \Rightarrow [Q] = 0 \ \vee \ [S] = 0$, gde je korišćeno da ako P deli QS, tada zbog nesvodljivosti polinoma P sledi da P deli Q ili P deli S. □

Primer 9.4 *Zaokružiti brojeve za koje je prsten* $(\mathbb{Z}_3[t]/P, +, \cdot)$ *polje:*

1) $P(t) = t + 2$ **2)** $P(t) = t^2 + 1$ **3)** $P(t) = t^2 + t + 1$
4) $P(t) = t^3 + t + 1$ **5)** $P(t) = t^{2005} + 1$

Primer 9.5 *Zaokružiti brojeve za koje je prsten* $(\mathbb{Z}_5[t]/P, +, \cdot)$ *polje:*

1) $P(t) = t^3 + 4t^2 + t + 2$ **2)** $P(t) = t^2 + 4$

Teorema 9.6 *U prstenu* $(F[t], +, \cdot)$ *svaki ideal je glavni ideal, za svaki ideal* $\mathcal{I} \neq (0)$ *postoji takav polinom* P *da je* $\mathcal{I}$ *skup svih polinoma deljivih sa* P *odnosno* $\mathcal{I} = (P)$ *Videti 6.13 i 6.14.*

Dokaz Neka je P polinom najmanjeg stepena u idealu $\mathcal{I} \neq (0)$ (jer $\mathcal{I} = (0)$ je očevidno glavni ideal) i neka je Q proizvoljni polinom iz $\mathcal{I}$. Tada na osnovu teoreme 8.19 sledi da postoje takvi polinomi S i R da je $Q = PS + R \ \wedge \ (R = 0 \vee dg(R) < dg(P))$.

Kako su Q i P iz $\mathcal{I}$, to je i $R = Q - PS$ takođe iz $\mathcal{I}$, pa je nemoguć slučaj $dg(R) < dg(P)$ jer smo pretpostavili da je polinom P najmanjeg stepena iz $\mathcal{I}$, tj. mora biti $R = 0$. Znači, $Q = PS$ za proizvoljni polinom Q iz $\mathcal{I}$, tj. $\mathcal{I} = \{PS | S \in F[t]\} = [P]$. □

Kako su u prstenu $(F[t], +, \cdot)$ svi ideali glavni, to je svaki ideal skup svih polinoma deljivih nekim fiksnim polinomom. Na osnovu definicije 6.14 je jasno da je $[P] = (P)$. Na primer, skup svih polinoma nad poljem F deljivih sa $t^2 + 1$ neki je ideal prstena $(F[t], +, \cdot)$.

Definicija 9.7 *Ideal* $\mathcal{I} \neq F[t]$ *prstena* $(F[t], +, \cdot)$ *maksimalan je ideal ako za svaki ideal* $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{I}$ *važi* $\mathcal{M} = \mathcal{I}$ *ili* $\mathcal{M} = F[t]$.

Teorema 9.8 *Ako je* P *nesvodljiv polinom prstena* $(F[t], +, \cdot)$, *tada je* (P) *maksimalni ideal.*

Dokaz Ako je P nesvodljiv polinom, tada je $(P) \neq F[t]$ jer je $(P) = F[t]$ ako i samo ako je P konstantan polinom. Neka je ideal $\mathcal{M} \supseteq (P)$. Kako je na osnovu teoreme 9.6 u prstenu $(F[t], +, \cdot)$ svaki ideal glavni, to je $\mathcal{M} = (Q)$ za neki polinom $Q \in F[t]$. Znači, $(Q) \supseteq (P)$ što govori da postoji takav polinom $S \in F[t]$ da je $P = QS$, a zbog nesvodljivosti polinoma P to znači da je polinom Q konstantan polinom ili da je S konstantan polinom, što po definiciji 6.14 znači da je $(Q) = F[t]$ ili $(Q) = (P)$, a dalje po definiciji 9.7 sledi da je (P) maksimalan ideal. □

Teorema 9.9 *Ako je $P \in F[t]$ nesvodljiv polinom, tada je $(F[t]/_{\equiv_P}, +, \cdot)$ polje.*

Dokaz Teorema 9.2 tvrdi da je $(F[t]/_{\equiv_P}, +, \cdot)$ komutativan prsten sa jedinicom. Treba samo dokazati da za proizvoljni $[Q] \neq 0 = (P)$ iz prstena $F[t]/_{\equiv_P}$, s obzirom na operaciju množenja postoji njemu inverzni element. Jasno je da $Q \notin (P)$ jer bi inače bilo $[Q] = 0$. Skup polinoma $\mathcal{I} = \{QS + T | S \in F[t] \wedge T \in (P)\}$ jeste ideal prstena $F[t]$ (pokazati!). On sadrži maksimalni ideal (P). (Ideal (P) je maksimalan zbog teoreme 9.8) i različit je od ideala (P), pa na osnovu definicije 9.7 sledi $\mathcal{I} = F[t]$. Znači, postoje takvi polinomi $S \in F[t]$ i $T \in (P)$ da je $QS + T = 1$ odnosno $QS = 1 - T$, što implicira $[QS] = [1 - T] \Leftrightarrow [Q][S] = [1]$ jer je $T \in (P)$. Kako smo za proizvoljni $[Q] \neq 0$ pronašli njemu inverzni $[S]$, to je dokaz završen. □

Ako je p prost broj, tada je $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ polje, kao što je dokazano u teoremi 6.7. Neka je P nesvodljiv polinom stepena n nad poljem $\mathbb{Z}_p$, tj. $P = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$. Tada $(\mathbb{Z}_p[t]/_{\equiv_P}, +, \cdot)$ jeste polje na osnovu 9.3. Elementi skupa $\mathbb{Z}_p[t]/_{\equiv_P}$ jesu klase ostataka pri deljenju polinomom P, tj. ako se za reprezenta klase uvek uzme polinom najnižeg stepena iz klase, odnosno baš ostatak, to će biti polinom stepena ne većeg od $n-1$. Zbog toga će se klasa $[Q]$ označavati samo sa Q ako je Q polinom najmanjeg stepena iz klase $[Q]$. Znači, polje $Z_p[t]/_{\equiv_P}$ imaće onoliko elemenata koliko ima polinoma stepena ne većeg od $n-1$ s koeficijentima iz $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Pošto je polinom stepena ne većeg od $n-1$ određen kada na n mesta odredimo njegove koeficijente, to će naše polje imati p^n elemenata (varijacije od p elemenata n-te klase). Sada je očevidno sledeće: ako se želi konstruisanje polja od p^n elemenata, gde je p prost broj a n bilo koji prirodan broj, treba pronaći bar jedan nesvodljiv polinom P stepena n nad poljem $\mathbb{Z}_p = GF(p)$ i formirati skup $\mathbb{Z}_p[t]/_{\equiv_P}$, odnosno polje $(\mathbb{Z}_p[t]/_{\equiv_P}, +, \cdot)$. Ako se za F uzme polje racionalnih brojeva, a za polinom P uzme $t^2 - 2$, tada je polje $(F[t]/_{\equiv_P}, +, \cdot)$ polje iz zadatka 6.16 (odnosno njemu izomorfno polje). Ako se za F uzme polje realnih brojeva a za polinom P uzme $t^2 + 1$, dobija se $(F[t]/_{\equiv_P}, +, \cdot)$ polje kompleksnih brojeva.

Ako je $P = t^2 - 2$, tada će se skup $F[t]/_{\equiv_P}$ označavati sa $F[t]/_{(t^2-2)}$. Lako se vidi da je $\mathbb{Q}[t]/_{(t^2-2)} = \{a + b\sqrt{2} | a \in \mathbb{Q} \wedge b \in \mathbb{Q}\}$.

Zadatak 9.10 *Napisati Kejlijeve tablice operacija $+$ i $\cdot$ za polja sa $4, 8$ i 9 elemenata.*

Rešenje Za konstrukciju polja od četiri elementa potrebni su polje $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ i nesvodljiv polinom t^2+t+1 nad tim poljem (teorema 8.49), pa su Kejlijeve tablice polja $(\mathbb{Z}_2[t]/_{(t^2+t+1)}, +, \cdot)$

$+$	0	1	t	$t+1$
0	0	1	t	$t+1$
1	1	0	$t+1$	t
t	t	$t+1$	0	1
$t+1$	$t+1$	t	1	0

$\cdot$	0	1	t	$t+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	t	$t+1$
t	0	t	$t+1$	1
$t+1$	0	$t+1$	1	t

Polje sa osam elemenata je $(\mathbb{Z}_2[t]/_{(t^3+t+1)}, +, \cdot)$, jer je polinom t^3+t+1 nesvodljiv nad poljem $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ (8.49). Zbog kraćeg zapisa u tabeli ovog polja, polinom t^2+t+1 označava se sa T. Kejlijeve tablice:

$+$	0	1	t	$t+1$	t^2	t^2+1	t^2+t	T
0	0	1	t	$t+1$	t^2	t^2+1	t^2+t	T
1	1	0	$t+1$	t	t^2+1	t^2	T	t^2+t
t	t	$t+1$	0	1	t^2+t	T	t^2	t^2+1
$t+1$	$t+1$	t	1	0	T	t^2+t	t^2+1	t^2
t^2	t^2	t^2+1	t^2+t	T	0	1	t	$t+1$
t^2+1	t^2+1	t^2	T	t^2+t	1	0	$t+1$	t
t^2+t	t^2+t	T	t^2	t^2+1	t	$t+1$	0	1
T	T	t^2+t	t^2+1	t^2	$t+1$	t	1	0

$\cdot$	0	1	t	$t+1$	t^2	t^2+1	t^2+t	T
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	t	$t+1$	t^2	t^2+1	t^2+t	T
t	0	t	t^2	t^2+t	$t+1$	1	T	t^2+1
$t+1$	0	$t+1$	t^2+t	t^2+1	T	t^2	1	t
t^2	0	t^2	$t+1$	T	t^2+t	t	t^2+1	1
t^2+1	0	t^2+1	1	t^2	t	T	$t+1$	t^2+t
t^2+t	0	t^2+t	T	1	t^2+1	$t+1$	t	t^2
T	0	T	t^2+1	t	1	t^2+t	t^2	$t+1$

Polje sa devet elemenata je $(\mathbb{Z}_3[t]/_{(t^2+1)}, +, \cdot)$, jer je polinom t^2+1 nesvodljiv nad poljem $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ (8.49). Napišite sami Kejlijeve tablice!

Evo još nekoliko osnovnih definicija i teorema, bez dokaza, koje bi se mogle izvesti na osnovu dosad izloženog. Slično definiciji potprstena definiše se i potpolje polja.

Definicija 9.11 *Podskup K polja F je potpolje polja F ako je K polje u odnosu na restrikcije operacija polja F.*

Definicija 9.12 *Polje F je proširenje polja K ako je K potpolje polja F.*

Na primer, polje racionalnih brojeva potpolje je realnih brojeva.

Definicija 9.13 *Presek svih potpolja polja F naziva se prosto potpolje polja F.*

Teorema 9.14 *Prosto potpolje polja F izomorfno je ili polju $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ za neki prost broj p ili polju racionalnih brojeva $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.*

Definicija 9.15 *Ako je K potpolje polja F i $S \subseteq F$, tada je $K(S)$ najmanje potpolje polja F koje sadrži K i S. Ako je $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ili $S = \{x\}$, tada $K(S)$ zapisujemo kao $K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ odnosno $K(x)$.*

Polje $K(x)$ nazivamo ekstenzija (proširenje) polja K elementom x.

Definicija 9.16 *Element x iz F je algebarski nad potpoljem K polja F ako postoje takvi $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$ da je $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$ i $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$. Polje F je algebarsko proširenje polja K ako je svaki element iz F algebarski nad K.*

Na primer, $\sqrt{2}$ iz polja realnih brojeva je algebarski nad poljem racionalnih brojeva, jer je $\sqrt{2}$ koren polinoma $P = t^2 - 2$ odnosno polinomske funkcije $\psi(P)(x) = x^2 - 2$.

Definicija 9.17 *Ako je x iz polja F algebarski nad njegovim potpoljem K, tada minimalni polinom elementa x jeste normalizovani polinom iz $K[t]$ najmanjeg stepena čiji je koren element x.*

Teorema 9.18 *Neka je x element polja F i neka je x algebarski nad potpoljem K polja F. Tada je minimalni polinom P elementa x nesvodljiv nad poljem K, polje $K[t]/_{\equiv_P}$ je izomorfno polju $K(x)$ i svaki element polja $K(x)$ može se jednoznačno predstaviti u obliku $a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$, gde su $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in K$.*

Na primer, polje $(\mathbb{Q}[t]/_{(t^2-2)}, +, \cdot)$ izomorfno je polju $(\{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}, +, \cdot)$.

Tu je $x = \sqrt{2}$. Ovo polje označava se sa $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ i naziva ekstenzija (proširenje) polja racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ elementom $\sqrt{2}$. Ovo proširenje je algebarsko. Izomorfizam je funkcija koja klasi $[a + bt]$ iz $\mathbb{Q}[t]/_{(t^2-2)}$ pridružuje $a + b\sqrt{2}$.

Polje $(\mathbb{Q}[t]/_{(t^3-2)}, +, \cdot)$ izomorfno je polju $(\{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} | a, b, c \in \mathbb{Q}\}, +, \cdot)$.

Tu je $x = \sqrt[3]{2}$, a izomorfizam je funkcija koja klasi $[a + bt + ct^2]$ pridružuje $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$. Ovo proširenje takođe je algebarsko.

Teorema 9.19 *Svako konačno polje ima p^n elemenata gde su p prost broj i n prirodan broj. Važi i obratno. Za svaki prost broj p i svaki prirodni broj n postoji polje od p^n elemenata.*

Teorema 9.20 *Multiplikativna grupa konačnog polja je ciklična.*

Na primer, u polju $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ generatorni element je 3, a u polju sa devet elemenata $t + 1$.

Poglavlje 10

DETERMINANTE

Da bi se definisale i proučile determinante, potrebni su osnovni pojmovi o permutacijama, pa se prvo daje definicija permutacije i neke od osnovnih teorema u vezi s permutacijom.

PERMUTACIJE

Pri definisanju funkcije rečeno je da je permutacija nekog skupa bijektivna funkcija toga skupa u samog sebe. Na primer, sve permutacije odnosno bijekcije skupa $S = \{1, 2, 3\}$ su:

$$\sigma_1 = \binom{123}{123},\ \sigma_2 = \binom{123}{132},\ \sigma_3 = \binom{123}{213},\ \sigma_4 = \binom{123}{231},\ \sigma_5 = \binom{123}{312},\ \sigma_6 = \binom{123}{321}.$$

Kako je skup S totalno uređen relacijom $\leq$, to će se u prethodnom zapisivanju prva vrsta izostavljati jer se podrazumeva da su u njoj svi elementi skupa S u redosledu saglasno relaciji $\leq$ (tj. 123...n) i permutacija će sada biti zapisana samo s drugom vrstom. Na primer, $\sigma_4 = 231$. Znači, permutacija skupa $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ biće isto koliko i različitih nizova od n elemenata skupa S u kojima se svaki element skupa S pojavljuje tačno jedanput, a kao što je poznato, njih ima $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

Evo još nekoliko načina zapisivanja permutacije:

$$\sigma : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$$

na primeru $\sigma(1) = 3,\ \sigma(2) = 5,\ \sigma(3) = 1, \sigma(4) = 4,\ \sigma(5) = 2,$ to jest

$$\sigma = \begin{pmatrix} 12345 \\ 35142 \end{pmatrix} = 35142 = [3,5,1,4,2] = [\sigma(1),\sigma(2),\sigma(3),\sigma(4),\sigma(5)].$$

Skup svih permutacija skupa $S = \{1,2,\ldots,n\}$ označavaće se sa S_n. Od sada će se raditi samo s permutacijama skupa $S = \{1,2,\ldots,n\}$, i to se više neće naglašavati. **Očevidno je da $(S_n, \circ)$ jeste grupa, gde je $\circ$ kompozicija funkcija (permutacija) iz skupa S_n.**

Definicija 10.1 *Ako su $i < j$ i $\sigma(i) > \sigma(j)$, tada se uređeni par $(\sigma(i), \sigma(j))$ naziva inverzija permutacije σ. Broj svih inverzija permutacije σ označiće se sa $Inv\,\sigma$.*

Prema tome, $Inv\,\sigma = |\{(\sigma(i),\sigma(j)) \mid i < j \land \sigma(i) > \sigma(j)\}|$

Na primer, broj svih inverzija permutacije $\sigma = 35142$ dobija se tako što se broje sve cifre desno od trojke koje su manje od tri kojih ima 2, desno od petice i manjih od pet ima 3, desno od jedinice manjih od jedan ima 0, desno od četiri manjih od četiri ima 1 i desno od dvojke manjih od dva ima 0, to jest ukupno ima 2+3+0+1+0=6 inverzija. Sada je jasno da važi:

Lema 10.2

$$Inv[m,\sigma(2),\ldots,\sigma(n)] = m - 1 + Inv[\sigma(2),\sigma(3),\ldots,\sigma(n)].$$

Ako je $(\sigma(i),\sigma(j))$ inverzija permutacije σ, tada se za $\sigma(i)$ i $\sigma(j)$ kaže da učestvuju u inverziji $(\sigma(i),\sigma(j))$. Ako je broj $Inv\,\sigma$ paran, permutacija σ se naziva parna, a u suprotnom neparna.

Kako svakom skupu $\{i,j\}$ jednoznačno odgovara skup $\{\sigma(i),\sigma(j)\}$, pri zadatoj permutaciji σ, to važi:

$$(-1)^{Inv\,\sigma} = \prod_{i<j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$$

jer sada svaka razlika $i - j$ iz imenioca ima sebi odgovarajuću razliku u brojiocu s kojom je po apsolutnoj vrednosti jednaka, pa je $\prod_{i<j} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$ po apsolutnoj vrednosti jednako 1, a očevidno je da će znakova $-$ biti isto koliko i inverzija, jer su svi imenioci negativni.

~~Primer 10.3~~ *Za permutaciju $\sigma = 35142$ imamo da je:*

$$\prod_{i<j} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} = (-1)^{Inv\,\sigma} = (-1)^6 = 1 =$$

$$= \frac{3-5}{1-2}\cdot\frac{3-1}{1-3}\cdot\frac{3-4}{1-4}\cdot\frac{3-2}{1-5}\cdot\frac{5-1}{2-3}\cdot\frac{5-4}{2-4}\cdot\frac{5-2}{2-5}\cdot\frac{1-4}{3-4}\cdot\frac{1-2}{3-5}\cdot\frac{4-2}{4-5}.$$

Definicija 10.4 *Transpozicija je permutacija koja sve elemente skupa S preslikava u same sebe, izuzev elemenata i i j $(i \neq j)$, dok i preslikava u j, a j preslikava u i.*

Ako je τ transpozicija, tada postoje dva različita elementa, i i j iz skupa S takva da su $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$, dok za svako $k \notin \{i,j\}$ važi $\tau(k) = k$.

Evo nekoliko primera transpozicija:

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}12345678\\12375648\end{pmatrix}, \sigma_2=\begin{pmatrix}12345678\\15342678\end{pmatrix}, \sigma_3=\begin{pmatrix}12345678\\12645378\end{pmatrix}, \sigma_4=\begin{pmatrix}12345678\\21345678\end{pmatrix}.$$

Definicija 10.5 *Ako se permutacija ρ dobija kompozicijom permutacije σ i transpozicije τ, tada se kaže da se permutacije ρ i σ razlikuju za transpoziciju.*

Drugim rečima, ρ i σ se razlikuju za transpoziciju ako i samo ako je $\rho = \sigma\circ\tau$ (to jest $\sigma = \rho\circ\tau$). To se može zapisati na sledeći način:

$$\rho(k) = \begin{cases} \sigma(k) & \text{za} \quad k \notin \{i,j\} \\ \sigma(j) & \text{za} \quad k = i \\ \sigma(i) & \text{za} \quad k = j \end{cases}$$

ili

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 \;\; 2 \;\ldots\; i \;\ldots\; j \;\ldots\; n \\ \sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(i)\ldots\sigma(j)\ldots\sigma(n) \end{pmatrix} \rho = \begin{pmatrix} 1 \;\; 2 \;\ldots\; i \;\ldots\; j \;\ldots\; n \\ \sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(j)\ldots\sigma(i)\ldots\sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Teorema 10.6 *Permutacija σ i njoj inverzna permutacija σ^{-1} iste su parnosti.*

Dokaz

$$(-1)^{Inv\,\sigma} = \prod_{i<j}\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} = \prod_{i<j}\frac{i-j}{\sigma(i)-\sigma(j)} = \prod_{i<j}\frac{\sigma^{-1}(\sigma(i))-\sigma^{-1}(\sigma(j))}{\sigma(i)-\sigma(j)}.$$

Ako se uvede smena $\sigma(i) = m$ i $\sigma(j) = k$, tada se u razlomku $\frac{\sigma^{-1}(m)-\sigma^{-1}(k)}{m-k}$ može smatrati da je $m < k$, jer ukoliko nije $m < k$, proširiće se taj razlomak sa -1, pa je

$$(-1)^{Inv\,\sigma} = \prod_{m<k}\frac{\sigma^{-1}(m)-\sigma^{-1}(k)}{m-k} = (-1)^{Inv\,\sigma^{-1}}.$$

Posmatrano na primeru 10.3 to izgleda ovako. Uzme se prvo recipročna vrednost celog proizvoda, jer je njegova apsolutna vrednost 1, pa se vrednost neće promeniti. Zatim drugi, četvrti, peti, šesti, sedmi i desti razlomak proširi se sa -1 i dobija da je proizvod tih razlomaka jednak proizvodu:

$$\frac{1-2}{3-5}\cdot\frac{3-1}{1-3}\cdot\frac{1-4}{3-4}\cdot\frac{5-1}{2-3}\cdot\frac{3-2}{1-5}\cdot\frac{4-2}{4-5}\cdot\frac{5-2}{2-5}\cdot\frac{3-4}{1-4}\cdot\frac{3-5}{1-2}\cdot\frac{5-4}{2-4}$$

u kojem se, ako se promeni redosled faktora (razlomaka), dobija:

$$\frac{3-5}{1-2}\cdot\frac{3-1}{1-3}\cdot\frac{3-4}{1-4}\cdot\frac{3-2}{1-5}\cdot\frac{5-1}{2-3}\cdot\frac{5-4}{2-4}\cdot\frac{5-2}{2-5}\cdot\frac{1-4}{3-4}\cdot\frac{1-2}{3-5}\cdot\frac{4-2}{4-5}$$

a to je jednako $(-1)^{Inv\,\sigma^{-1}}$.

Teorema 10.7 *Ako se permutacije razlikuju za transpoziciju, onda su one različite parnosti.*

Dokaz Posmatrajmo permutaciju σ:

$$\sigma = [\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(i), \ldots, \sigma(j), \ldots, \sigma(n)]$$

Uzeto je da je $i < j$, što ne utiče na opštost dokaza. Uzeće se još da je $\sigma(i) < \sigma(j)$, jer je u suprotnom provera slična. Ako sada $\sigma(i)$ i $\sigma(j)$ zamene mesta, dobija se nova permutacija koja se razlikuje od polazne za transpoziciju. Razmatrajući sve moguće slučajeve pokazaće se da su ove dve permutacije različite parnosti. Uočiti neki element $\sigma(l)$ i izvršiti podelu na sledeće slučajeve:

- $l < i$ ili $j < l$

  U ovom slučaju, posle zamene mesta elementima $\sigma(i)$ i $\sigma(j)$, broj inverzija u kojima učestvuje $\sigma(l)$ očevidno se ne menja.

- $i < l < j$

  - $\sigma(l) < \sigma(i) < \sigma(j)$
    Kako $(\sigma(i), \sigma(l))$ jeste inverzija i $(\sigma(l), \sigma(j))$ nije inverzija, a posle zamene mesta elementima $\sigma(i)$ i $\sigma(j)$ dobija se da $(\sigma(j), \sigma(l))$ jeste inverzija i $(\sigma(l), \sigma(i))$ nije inverzija, sledi da se broj inverzija u kojima učestvuje $\sigma(l)$ nije promenio.
  - $\sigma(i) < \sigma(j) < \sigma(l)$
    U ovom slučaju se proverava, analogno prethodnom slučaju, da se broj inverzija u kojima učestvuje $\sigma(l)$ nije promenio.
  - $\sigma(i) < \sigma(l) < \sigma(j)$
    U ovom slučaju broj inverzija posle zamene mesta elementima $\sigma(i)$ i $\sigma(j)$ povećava se za 2, odnosno parnost se ne menja.

Za svako $l \notin \{i, j\}$ sledi da broj inverzija u kojima učestvuje $\sigma(l)$ ne menja parnost zamenom mesta elementima $\sigma(i)$ i $\sigma(j)$. I najzad, kako $(\sigma(i), \sigma(j))$ nije inverzija, a posle zamene mesta elementima $\sigma(i)$ i $\sigma(j)$ dobija se da $(\sigma(j), \sigma(i))$ jeste iverzija, sledi da se parnost broja inverzija promenila posle zamene mesta elementima $\sigma(i)$ i $\sigma(j)$. □

Neka se permutacije σ i ρ razlikuju za transpoziciju τ, gde su $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$, a za svako $k \notin \{i, j\}$ je $\tau(k) = k$, to jest

$$\sigma = [\sigma(1), \sigma(2) \ldots, \sigma(i), \ldots, \sigma(l), \ldots, \sigma(j), \ldots, \sigma(n)]$$
$$\rho = [\sigma(1), \sigma(2) \ldots, \sigma(j), \ldots, \sigma(l), \ldots, \sigma(i), \ldots, \sigma(n)].$$

Iz dokaza prethodne teoreme vidi se da se brojevi inverzija permutacija σ i ρ razlikuju za $2k+1$, gde je k broj elemenata $\sigma(l)$ koji su po mestu (lokaciji) između $\sigma(i)$ i $\sigma(j)$ a po veličini između $\sigma(i)$ i $\sigma(j)$, odnosno $k = Card\{\sigma(l) | i < l < j \ \wedge \ \sigma(i) < \sigma(l) < \sigma(j)\}$.

U poglavlju **„Matrice i linearne transformacije”** data je definicija matrice 16.1. Sada sledi definicija determinante.

Definicija 10.8 *Determinanta u oznaci det jeste funkcija koja preslikava skup svih kvadratnih matrica u skup F, gde je F polje nad kojim su definisane te matrice. Neka su $A = [a_{ij}]_{nn}$ proizvoljna matrica i n proizvoljan prirodni broj. Tada je $\det A$, reda n, definisana kao:*

$$\det : \mathcal{M}_{nn} \to F \qquad \det A = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{Inv\,\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Kao što je već rečeno, S_n je skup svih permutacija skupa $S = \{1, \dots, n\}$, odnosno skup bijekcija skupa S u skup S, $Inv\,\sigma$ broj svih inverzija permutacije σ, a $\mathcal{M}_{nn}$ skup svih kvadratnih matrica reda n. Uobičajene su sledeće oznake za $\det A$ odnosno $\det[a_{ij}]_{nn}$:

$$\det A = \det[a_{ij}]_{nn} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ekvivalentna definicija determinante data je na kraju odeljka rang matrice i inverzna matrica (pretposlednji pasus).

U „geometrijskoj interpretaciji" ova definicija može se opisati sledećim tekstom:

Odabere se proizvoljan element prve vrste matrice A, zatim proizvoljan element druge vrste matrice A, ali da nije u istoj koloni s prethodno odabranim elementom.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \dots & \boxed{a_{4n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \boxed{a_{n4}} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Zatim se odabira proizvoljan element treće vrste matrice A koji nije ni u jednoj od kolona u kojima se nalaze prethodno odabrani elementi. Nastavkom ovog postupka do kraja dobija se n elemenata matrice A. Sve njih pomnožiti i to je jedan sabirak tražene sume, odnosno to je element $a_{1\sigma_1(1)}a_{2\sigma_1(2)}\dots a_{n\sigma_1(n)}$ (u našem primeru to je $a_{12}a_{21}a_{33}a_{4n}\dots a_{n4}$), gde je $\sigma_1 \in S_n$ (u našem primeru $\sigma_1 = 213n\dots4$). Nastaviti proceduru poput prethodne i opet će se dobiti n elemenata matrice A koje se međusobno pomnože i dobija element $a_{1\sigma_2(1)}a_{2\sigma_2(2)}\dots a_{n\sigma_2(n)}$, gde je $\sigma_2 \in S_n$. Samo treba voditi računa da je $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Nastaviti ovu proceduru dok se ne iscrpe sve različite mogućnosti, tj. dok se ne prođe kroz skup svih permutacija S_n, i dobiće se i poslednji element na ovaj način, tj. $a_{1\sigma_k(1)}a_{2\sigma_k(2)}\dots a_{n\sigma_k(n)}$, gde je $\sigma_k \in S_n$. Jasno je da je $k = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Svaki od ovih elemenata $a_{1\sigma_i(1)}a_{2\sigma_i(2)}\dots a_{n\sigma_i(n)}$ uzeti sa znakom plus ako je odgovarajuća permutacija

σ_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ parna, u suprotnom sa znakom minus. Sada se sumiraju svi elementi i dobija se $\det A$.

Primer 1.

$$\det[a_{11}] = a_{11} \qquad \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Primer 2.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Primećuje se da su u svakom sabirku prvi indeksi uvek 123, dok su drugi indeksi redom 123, 132, 213, 231, 312, 321, tj. sve permutacije skupa $\{1, 2, 3\}$. Prva, četvrta i peta permutacija su parne jer imaju redom 0, 2 i 2 inverzija, a preostale neparne jer imaju redom 1, 1 i 3 inverzije.

Primetimo da je

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$ odnosno da se determinanta trećega reda izračunava pomoću tri determinante drugoga reda. Videćemo kasnije (teorema 10.21) da analogno i determinanta n-toga reda se izračunava pomoću n determinanti reda $n - 1$.

~~Primer 3.~~ Izračunati vrednost determinante

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & x_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & x_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & x_n \end{vmatrix}$$

Izračunati ovu determinantu po definiciji. Determinanta matrice $D = \det[a_{ij}]_{n+1,n+1}$ jednaka je sumi čiji je svaki sabirak oblika

$$\pm a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n+1\sigma(n+1)},$$

a σ je proizvoljna permutacija skupa $S = \{1, 2, \ldots, n, n{+}1\}$. Za datu matricu lako se proverava da pomenuti sabirci ne moraju biti nula samo ako je $\sigma \in \{[21345\ldots n+1],[32145\ldots n+1],[42315\ldots n+1]\ldots[n+1\,2345\ldots n1]\}$ znači, biće samo n (od ukupno $(n+1)!$) sabiraka. Kako su sve od ovih n permutacija neparne jer imaju redom 1, 3, 5 i $2n-1$ inverzija, to je vrednost ove determinante

$$D = -x_2x_3x_4\ldots x_n - x_1x_3x_4\ldots x_n - x_1x_2x_4\ldots x_n - \ldots - x_1x_2x_3\ldots x_{n-1}.$$

Ako su bar dve promenljive jednake nuli, tada je $D = 0$; ako je tačno jedna promenljiva jednaka nuli, na primer x_i $(i \in \{2, 3, \ldots, n-2, n-1\})$, tada je

$$D = D_i = -x_1x_2\ldots x_{i-1}x_{i+1}\ldots x_n, \qquad \text{dok je}$$

$$D_1 = -x_2x_3\ldots x_n \quad \text{i} \quad D_n = -x_1x_2\ldots x_{n-1}$$

i, na kraju, ako su sve promenljive različite od nule, tada je

$$-x_2x_3x_4\ldots x_n - x_1x_3x_4\ldots x_n - x_1x_2x_4\ldots x_n - \ldots - x_1x_2x_3x_4\ldots x_{n-1} =$$

$$= -x_1x_2x_3x_4\ldots x_n(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}) = -\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}$$

Definicija 10.9 *Ako je matrica $B = [b_{ij}]_{nn}$ dobijena od matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$ tako što su kolone matrice A uzete za vrste matrice B, to jest $b_{ij} = a_{ji}$, tada je matrica B* **transponovana matrica** *od matrice A i označava se sa $B = A^\top$ ili $B = A^*$ samo kada je A realna matrica.*

Primer

$$\text{Ako je } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \text{tada je} \quad A^\top = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Teorema 10.10 *Determinanta matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$ i determinanta njoj transponovane matrice $A^\top = [b_{ij}]_{nn}$ su jednake.*

Dokaz

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{Inv\,\sigma} a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{Inv\,\sigma} b_{\sigma(1)1}b_{\sigma(2)2}\cdots b_{\sigma(n)n}$$

Zbog bijektivnosti funkcije σ za svako $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, postoji $l \in \{1,2,\ldots,n\}$, takvo da je $b_{\sigma(k)k} = b_{l\sigma^{-1}(l)}$ (na primer ako je $\sigma(1) = 5$, tada je $b_{\sigma(1)1} = b_{5\sigma^{-1}(5)}$), pa je zbog komutativnosti množenja

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{Inv\,\sigma} b_{1\sigma^{-1}(1)}b_{2\sigma^{-1}(2)}\cdots b_{n\sigma^{-1}(n)}.$$

Kako je operacija traženja inverzne funkcije u skupu S_n bijekcija skupa S_n u skup S_n, to znači da kada σ prođe kroz ceo S_n, onda i σ^{-1} prođe kroz ceo S_n, pa je

$$\det A = \sum_{\sigma^{-1}\in S_n} (-1)^{Inv\,\sigma} b_{1\sigma^{-1}(1)}b_{2\sigma^{-1}(2)}\cdots b_{n\sigma^{-1}(n)}.$$

I na kraju, zbog $(-1)^{Inv\,\sigma} = (-1)^{Inv\,\sigma^{-1}}$ (teorema 10.6) sledi da je

$$\det A = \sum_{\sigma^{-1}\in S_n} (-1)^{Inv\,\sigma^{-1}} b_{1\sigma^{-1}(1)}b_{2\sigma^{-1}(2)}\cdots b_{n\sigma^{-1}(n)} = \det A^T$$

jer σ^{-1} prolazi kroz ceo S_n, pa je svejedno da li *na svim mestima* piše σ^{-1} ili σ. (Kao što je na primer $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{k=1}^{n} x_k$.) □

Zahvaljujući ovoj teoremi, sve osobine determinante koje se dokažu za vrste, važiće i za kolone. Dokazivaće se teoreme (osobine determinante) koje se odnose na vrste matrica.

Teorema 10.11 *Ako je matrica B dobijena od matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$ tako što su i-ta i j-ta vrsta zamenile mesta $(i < j)$, tada je*

$$\det B = -\det A$$

Dokaz Kako je matrica B dobijena od matrice A tako što su i-ta i j-ta vrsta zamenile mesta, to je

$$\det B = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{Inv\,\sigma} a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{j\sigma(i)}\cdots a_{i\sigma(j)}\cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Da bi se to dovelo u vezu sa $\det A$, treba uvesti takvu smenu da je svaki faktor u tim sabircima oblika $a_{i\rho(i)}$ i da se na svim mestima nalazi ρ umesto σ. Ta smena je očevidno $\sigma = \rho\circ\tau$, gde su $\circ$ operacija kompozicije funkcija u skupu S_n i τ transpozicija koja i preslikava u j, j preslikava u i, a sve ostale elemente skupa $S = \{1,2,\ldots,n\}$ preslikava u same sebe. Sada je $\sigma(i) = (\rho\circ\tau)(i) = \rho(\tau(i)) = \rho(j)$, $\sigma(j) = (\rho\circ\tau)(j) = \rho(\tau(j)) = \rho(i)$ i za svako $k \notin \{i,j\}$ $\sigma(k) = (\rho\circ\tau)(k) = \rho(\tau(k)) = \rho(k)$, na osnovu čega sledi

$$\det B = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{Inv\,\sigma} a_{1\rho(1)}a_{2\rho(2)}\cdots a_{j\rho(j)}\cdots a_{i\rho(i)}\cdots a_{n\rho(n)} \quad \text{ili}$$

$$\det B = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{Inv\,\sigma} a_{1\rho(1)}a_{2\rho(2)}\cdots a_{i\rho(i)}\cdots a_{j\rho(j)}\cdots a_{n\rho(n)}.$$

Kako se ρ i σ razlikuju za transpoziciju (različite su parnosti), zbog teoreme 10.7 sledi da je $(-1)^{Inv\,\sigma} = -(-1)^{Inv\,\rho}$, pa se dobija

$$\det B = -\sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{Inv\,\rho} a_{1\rho(1)}a_{2\rho(2)}\cdots a_{i\rho(i)}\cdots a_{j\rho(j)}\cdots a_{n\rho(n)}.$$

Najzad, treba primetiti da jednakost (smena) $\sigma = \rho \circ \tau$, , gde je τ fiksna transpozicija, određuje funkciju $\psi : S_n \to S_n$ koja je definisana kao

$$\psi(\sigma) = \rho \quad \Leftrightarrow \quad \sigma = \rho \circ \tau.$$

Kako je uređeni par $(S_n, \circ)$ grupa i zbog teoreme 5.14, sledi da je za svako $\sigma \in S_n$ jednoznačno određena permutacija ρ koja zadovoljava jednakost $\sigma = \rho \circ \tau$ i obratno, za svaku permutaciju ρ jednoznačno je određena permutacija σ koja zadovoljava jednakost $\sigma = \rho \circ \tau$. To znači da je funkcija ψ bijekcija, pa kada σ **„prolazi"** kroz celo S_n, onada i ρ **„prolazi"** kroz celo S_n, tako da se u ovoj sumi umesto $\sigma \in S_n$ može staviti $\rho \in S_n$, pa je

$$\det B = -\sum_{\rho \in S_n} (-1)^{Inv\,\rho} a_{1\rho(1)} a_{2\rho(2)} \dots a_{i\rho(i)} \dots a_{j\rho(j)} \dots a_{n\rho(n)} = -\det A. \square$$

Dokazi prethodne dve teoreme malo su teži (apstraktni), dok će sve ostale teoreme o determinantama biti trivijalne posledice definicije determinante i prethodnih dveju teorema.

Teorema 10.12 *Ako su dve vrste u kvadratnoj matrici A iste, tada je* $\det A = 0$.

Dokaz Ako u pomenutoj matrici A te dve vrste, koje su iste, zamene mesta, po teoremi 10.11 slediće da se determinanta te „nove" matrice razlikuje od determinante matrice A samo u znaku. Kako je „nova" matrica očevidno jednaka matrici A , to je $\det A = -\det A$, odnosno $\det A + \det A = 0$, odakle sledi da je $\det A = 0$ ako je polje F nad kojim je definisana matrica, različito od polja karakteristike 2. Iako ovaj dokaz važi samo ako je polje F karakteristike različite od 2, tvrdnja teoreme važi i za polja karakteristike 2, što se može dokazati. $\square$

Teorema 10.13 *Ako se i-ta vrsta matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$ pomnoži skalarom λ, dobija se matrica B za koju važi* $\det B = \lambda \det A$.

Dokaz

$$\det B = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{Inv\,\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots \lambda a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \lambda \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{Inv\,\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} = \lambda \det A. \quad \square$$

Prema tome, determinanta se množi skalarom tako što se svi elementi *samo jedne vrste* pomnože tim skalarom.

Teorema 10.14 *Ako su svi elementi i-te vrste matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$ jednaki nuli, tada je* $\det A = 0$.

Dokaz Kako je $a_{i\sigma(i)} = 0$ za svaku permutaciju $\sigma \in S_n$, to svaki sabirak u sumi

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{Inv\,\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

ima bar jedan faktor jednak nuli, pa je zaista $\det A = 0$. $\square$

Teorema 10.15 *Ako su k-ta i l-ta vrsta $(k \neq l)$ matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$ proporcionalne, odnosno linearno zavisne, tada je* $\det A = 0$.

Dokaz Zbog pomenute proporcionalnosti sledi da je $a_{kj} = \lambda a_{lj}$ za svako $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, pa se dobija da je

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{Inv\,\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{k\sigma(k)} \cdots a_{l\sigma(l)} \cdots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{Inv\,\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots \lambda a_{l\sigma(l)} \cdots a_{l\sigma(l)} \cdots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \lambda \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{Inv\,\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{l\sigma(l)} \cdots a_{l\sigma(l)} \cdots a_{n\sigma(n)} = 0,$$

jer su dve vrste jednake i koristi se prethodna teorema. $\square$

Teorema 10.16 *Neka je i-ta vrsta matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$ pomnožena sa λ i dodata j-toj vrsti i tako je dobijena matrica B. Tada je* $\det A = \det B$.

Dokaz

$$\det B = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{Inv\,\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots (\lambda a_{i\sigma(i)} + a_{j\sigma(j)}) \cdots a_{n\sigma(n)} =$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{Inv\,\sigma} a_{1\sigma(1)} \cdots \lambda a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{Inv\,\sigma} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \lambda \cdot 0 + \det A = \det A \quad \square$$

Definicija 10.17 *Neka je $A = [a_{ij}]_{nn}$ kvadratna matrica reda n nad poljem F i neka je $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})$ vektor n-torka nad istim poljem F, tada je A_{x_i} matrica dobijena od matrice A tako što su elementi i-te vrste $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ matrice A zamenjeni redom sa $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}$, to jest i-ta vrsta matrice A zamenjena vektorom x_i.*

Teorema 10.18 *Determinanta je linearna funkcija po svakoj vrsti, to jest* $\det A_{x_i+y_i} = \det A_{x_i} + \det A_{y_i}$ *i važi teorema 10.13* ($\det A_{\alpha x_i} = \alpha \cdot \det A_{x_i}$), *gde je* $A = [a_{ij}]_{nn}$ *neka matrica.*

Dokaz

$$\det A_{x_i+y_i} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{Inv\,\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots (x_{i\sigma(i)} + y_{i\sigma(i)}) \ldots a_{n\sigma(n)} =$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{Inv\,\sigma} a_{1\sigma(1)} \ldots x_{i\sigma(i)} \ldots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{Inv\,\sigma} a_{1\sigma(1)} \ldots y_{i\sigma(i)} \ldots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \det A_{x_i} + \det A_{y_i}. \quad \square$$

Primer

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 \\ \alpha x_1 + \beta y_1 & \alpha x_2 + \beta y_2 & \alpha x_3 + \beta y_3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

Teorema 10.19 *Determinanta jedinične matrice* I, *čiji su svi elementi na glavnoj dijagonali jedinice a van nje nule, jednaka je 1.*

Videti poglavlje Matrice i linearne transformacije.

Sledi dokazivanje teoreme koja daje rekurentnu relaciju za izračunavanje determinante n-tog reda pomoću determinanti $n-1$-og reda. Prethodno se mora dati definicija minora M_{ij} elementa a_{ij} i kofaktora A_{ij} elementa a_{ij} matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$.

Definicija 10.20 *Minor* M_{ij} *elementa* a_{ij} *matrice* $A = [a_{ij}]_{nn}$ *jeste determinanta matrice koja se dobija od matrice* A *izostavljanjem* i*-te vrste i* j*-te kolone. Kofaktor* A_{ij} *elementa* a_{ij} *matrice* A *iznosi*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Teorema 10.21 *Ako je* $A = [a_{ij}]_{nn}$ *matrica nad poljem* F, *tada je*

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}.$$

Dokaz Determinanta matrice A po definiciji jednaka je sumi od $n!$ sabiraka. Podelićemo tu sumu na n suma od kojih svaka ima $(n-1)!$ sabiraka. Prva suma će biti po svim permutacijama σ koje na prvom mestu imaju 1 itd., k-ta suma biće po svim permutacijama u kojih je na prvom mestu k, gde k preuzima vrednosti iz skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Znači, k-ta suma je

$$\sum_{\sigma(1)=k} (-1)^{Inv\,\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{i\sigma(i)} \ldots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma(1)=k} (-1)^{[k,\sigma(2),\ldots,\sigma(n)]} a_{1k} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{i\sigma(i)} \ldots a_{n\sigma(n)},$$

što je dalje, zbog leme 10.2, jednako

$$= a_{1k} \sum_{\sigma(1)=k} (-1)^{k-1+[\sigma(2),\ldots,\sigma(n)]} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{i\sigma(i)} \ldots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= a_{1k}(-1)^{k-1} \sum_{\sigma(1)=k} (-1)^{[\sigma(2),\ldots,\sigma(n)]} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{i\sigma(i)} \ldots a_{n\sigma(n)} =$$

$$a_{1k}(-1)^{k+1} M_{1k} = a_{1k}(-1)^{1+k} M_{1k} = a_{1k} A_{1k}.$$

Kako je $\det A$ jednako sumi od n suma od kojih je svaka jednaka $a_{1k}A_{1k}$ $k \in \{1, \ldots, n\}$, to je

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} A_{1k} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}. \quad \square$$

Posledica ove teoreme je sledeća teorema.

Teorema 10.22 *Ako su svi elementi ispod glavne dijagonale matrice* $A = [a_{ij}]_{nn}$ *jednaki nuli, tada je determinanta matrice jednaka proizvodu elemenata na glavnoj dijagonali, to jest* $\det A = a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$.

Ako su svi elementi ispod sporedne dijagonale matrice jednaki nuli, tada je determinanta matrice jednaka proizvodu elemenata na toj dijagonali, pomnoženog još brojem $(-1)^{\binom{n}{2}}$, *gde je* n *red matrice.*

Teorema 10.23 *Neka je* $A = [a_{ij}]_{nn}$ *matrica. Tada je suma*

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn},$$

jednaka $\det A$ *za* $i = k$, *a jednaka je* 0 *za* $i \neq k$.

Dokaz Prvo treba dokazati da je

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}.$$

Dokaz se izvodi indukcijom po i. Za $i = 1$ tvrđenje je tačno na osnovu prethodne teoreme. Pretpostavimo da je tačno za i i dokažimo da je tačno za $i+1$. Neka je matrica B dobijena od matrice A tako što su i-ta i $i+1$-va vrsta zamenile mesta, što znači da je $\det B = -\det A$. Izračunati determinantu matrice B po induktivnoj pretpostavci razvijajući je po i-toj vrsti, tj. po vrsti $a_{i+1,1}\ a_{i+1,2}\ \ldots\ a_{i+1,n}$, jer su i-ta i $i+1$-va vrsta zamenile mesta. Očevidno je da se kofaktori elementa $a_{i+1,k}$ u matricama A i B razlikuju samo po znaku. Po induktivnoj pretpostavci sledi

$$-\det A = \det B = a_{i+1,1}B_{i+1,1} + a_{i+1,2}B_{i+1,2} + \ldots + a_{i+1,n}B_{i+1,n} =$$

$$= -a_{i+1,1}A_{i+1,1} - a_{i+1,2}A_{i+1,2} - \ldots - a_{i+1,n}A_{i+1,n},$$

odnosno

$$\det A = a_{i+1,1}A_{i+1,1} + a_{i+1,2}A_{i+1,2} + \ldots + a_{i+1,n}A_{i+1,n}.$$

Dokazati sada da je za $i \neq k$

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn} = 0.$$

Neka je matrica C dobijena od matrice A tako što je k-ta vrsta matrice A zamenjena i-tom vrstom matrice A, pa matrica C ima dve vrste jednake, zbog čega je $\det C = 0$. Računanjem determinante matrice C razvijanjem po k-toj vrsti dobija se

$$a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \ldots + a_{kn}A_{kn} = 0,$$

a kako je i-ta vrsta matrice C jednaka k-toj vrsti matrice C, to je

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn} = 0. \quad \square$$

Teorema 10.24 *Ako su A i B kvadratne matrice reda n definisane nad poljem F i ako je α proizvoljni skalar iz polja F, tada je*

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A \qquad i \qquad \det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Dokaz Pogledati definiciju 16.2 množenja broja α matricom A i množenja matrica A i B. Prva jednakost dobija se primenom teoreme 10.13 na svaku vrstu determinante $\det(\alpha A)$.

Druga jednakost dokazuje se za n=3, jer je dokaz za ostale prirodne brojeve n analogan. Neka su $A = [a_{ij}]_{33}$ i $B = [b_{ij}]_{33}$. Tada

$$\det(AB) = \det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}\right) =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{vmatrix}$$

Primenom teoreme 10.18 prethodna determinanta jednaka je zbiru $3^3 = 27$ determinanti. Međutim, očevidno je da $3^3 - 3! = 27 - 6 = 21$ determinanti jednako je 0, jer posle izvođenja zajedničkog faktora iz kolona bar dve kolone će biti jednake. Zato je $\det(AB)$ jednaka zbiru preostalih 6 determinanti odnosno $\det(AB)$=

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} & a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} & a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} & a_{32}b_{22} & a_{33}b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{13}b_{32} & a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} & a_{23}b_{32} & a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{11} & a_{33}b_{32} & a_{32}b_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} & a_{13}b_{33} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} & a_{23}b_{33} \\ a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} & a_{33}b_{33} \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} \\ a_{22}b_{21} & a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} \\ a_{32}b_{21} & a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{23} \\ a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{23} \\ a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} & a_{32}b_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{13}b_{31} & a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} \\ a_{23}b_{31} & a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} \\ a_{33}b_{31} & a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} \end{vmatrix}$$

Ako se iz svih kolona izvedu zajednički faktori, ostaće determinanta $\det A$ ili $-\det A$ jer su kolone samo ispermutovane u odnosu na kolone matrice A. Sada se iz tog zbira može izvesti zajednički faktor $\det A$, tj. $\det A \cdot (b_{11}b_{22}b_{33} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33} + b_{13}b_{21}b_{32} + b_{12}b_{23}b_{31} - b_{13}b_{22}b_{31}) =$
$\det A \cdot (b_{11}b_{22}b_{33} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - b_{13}b_{22}b_{31})$
$= \det A \cdot \det B$.□

SVE ZA VRSTE, VAŽI I ZA KOLONE

Poglavlje 11

SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

Pre definicije sistema linearnih jednačina prvo treba objasniti promenljivu i konstantu nekog skupa.

Definicija 11.1 *Promenljiva skupa U je proizvoljni simbol koji se može zameniti bilo kojim elementom skupa U. Konstanta skupa U je proizvoljni element skupa U.*

Neka su A i B izrazi u kojima se pojavljuje promenljiva x. Tada $A = B$ je jednačina po promenljivoj x.

Definicija 11.2 *Sistem linearnih jednačina S nad poljem F za n-torku nepoznatih $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n, m \in \mathbb{N}$, gde su $a_{ij} \in F$ i $b_i \in F$ za $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ i $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, jeste konjunkcija formula (linearnih* *jednačina) odnosno*

$$S: \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}$$

Ako je $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$, *onda se za sistem* S *kaže da je homogen. Skalari* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *polja* F *nazivaju se slobodni članovi.*

Sistem linearnih jednačina može se napisati i u matričnom obliku $Ax = b$, gde je $A = [a_{ij}]_{mn}$ data matrica tipa mn, x matrica kolona čiji su elementi x_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, nepoznate sistema i b je data matrica kolona odnosno:

$$S : Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ili, na osnovu definicije 16.26 matrica A može se posmatrati kao linearna transformacija $A : F^n \to F^m$, pa su Ax uređena m-torka i $Ax = b$ jednakost dveju uređenih m-torki. Sledi još jedan matrični oblik zapisivanja sistema S:

$$S: \ Ax = b \Leftrightarrow x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Odavde sledi da sistem $Ax = b$ ima rešenje (tj. određen je ili neodređen) akko b pripada vektorskom prostoru generisanom vektorima kolona matrice A.

Ako se matrica $A = [a_{ij}]_{mn}$ nad poljem F posmatra kao linearna transformacija $A: F^n \to F^m$, tada rešavanje jednačine $Ax = b$ predstavlja traženje svih vektora $x = (x_1, \ldots, x_n) \in F^n$ koji se linearnom transformacijom A preslikavaju u vektor $b = (b_1, \ldots, b_m) \in F^m$.

Sistem je određen za svako $b \in F^m$ ako i samo ako je funkcija A bijektivna!

Definicija 11.3 *Uređena n-torka $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ rešenje je sistema S, odnosno sistema $Ax = b$, ako je $A\alpha = b$, to jest*

$$S: \quad \begin{array}{ccccccccc} a_{11}\alpha_1 & + & a_{12}\alpha_2 & + & \ldots & + & a_{1n}\alpha_n & = & b_1 \\ a_{21}\alpha_1 & + & a_{22}\alpha_2 & + & \ldots & + & a_{2n}\alpha_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\alpha_1 & + & a_{m2}\alpha_2 & + & \ldots & + & a_{mn}\alpha_n & = & b_m. \end{array}$$

Skup svih rešenja sistema S označavaće se sa $R_S = \{x \in F^n | Ax = b\}$.

Definicija 11.4 *Sistemi S_1 i S_2 ekvivalentni su ako i samo ako imaju iste skupove rešenja, to jest $R_{S_1} = R_{S_2}$.*

Definicija 11.5 *Ekvivalentne (elementarne) transformacije sistema linearnih jednačina:*

1. *Zamena mesta jednačinama.*

2. *Množenje jednačine brojem različitim od nule.*

3. *Dodavanje jednačine nekoj drugoj jednačini.*

4. *Promena mesta sabircima u jednačinama (iste nepoznate pišu se jedna ispod druge odnosno u istoj koloni).*

Teorema 11.6 *Ekvivalentnim transformacijama skup rešenja sistema se ne menja, to jest ako je sistem S_1 dobijen od sistema S_2 ekvivalentnim transformacijama, tada je $R_{S_1} = R_{S_2}$, odnosno sistemi S_1 i S_2 su ekvivalentni.*

Dokaz Očevidna je provera da ako je $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ rešenje sistema S_1, tada je $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ rešenje i sistema S_2, i obratno. Dokaz ove teoreme je i posledica teoreme 17.37. □

Teorema 11.7 *Ako su F proizvoljno polje i $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in F^n$ i $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in F^n$ rešenja sistema S nad poljem F, onda je i*

$$r = (\ \lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\beta_1,\ \lambda\alpha_2 + (1-\lambda)\beta_2,\ \ldots\ , \lambda\alpha_n + (1-\lambda)\beta_n\ )$$

rešenje sistema S za svako $\lambda \in F$.

Dokaz Sledi provera da li je n-torka r rešenje jednačine $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$ jednostavnim zamenjivanjem n-torke r za svako $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

$$a_{i1}(\lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\beta_1) + a_{i2}(\lambda\alpha_2 + (1-\lambda)\beta_2) + \ldots + a_{in}(\lambda\alpha_n + (1-\lambda)\beta_n) =$$

$$\lambda(a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + a_{in}\alpha_n) + (1-\lambda)(a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \ldots + a_{in}\beta_n) =$$

$$= \lambda b_i + (1-\lambda)b_i = b_i. \quad \square$$

Posledica Ako je sistem S nad *beskonačnim* poljem i ako ima bar dva različita rešenja, tada sistem S ima beskonačno mnogo rešenja.

Definicija 11.8 *Sistem S je rešiv (saglasan, neprotivrečan, moguć) ako postoji bar jedna n-torka iz F^n koja je njegovo rešenje, tj. ako je skup R_S neprazan. U suprotnom slučaju, kada je skup rešenja R_S prazan skup, sistem S je nerešiv (nesaglasan, protivrečan, nemoguć, kontradiktoran). Ako sistem ima tačno jedno rešenje, za njega se kaže da je određen, a ako ima više od jednog rešenja, označava se kao neodređen.*

Neodređeni sistemi se dalje klasifikuju prema *stepenu neodređenosti*, što će se definisati pomoću trougaonog oblika sistema linearnih jednačina.

Ako se A posmatra kao linearna transformacija, očevidno je da ako je $A : F^n \longrightarrow F^m$ sirjektivna, tada mora postojati bar jedno rešenje, tj. sistem je rešiv (saglasan, moguć). Ako je linearna transformacija $A : F^n \longrightarrow F^m$ bijektivna, tada sistem ima tačno jedno rešenje i, na kraju, sistem može biti kontradiktoran samo ako transformacija $A : F^n \longrightarrow F^m$ nije sirjektivna.

Teorema 11.9 *Sistem linearnih jednačina S, to jest $Ax = b$, rešiv je ako i samo ako je*

$$\textbf{\textit{rang}} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = \textbf{\textit{rang}} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}$$

Dokaz Neka je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}.$$

Matrica A se zove matrica sistema S, a matrica B proširena matrica sistema S. Označiti sa W vektorski prostor generisan vektorima kolona matrice A i sa V vektorski prostor generisan kolonama matrice B.

($\Rightarrow$)

Ako je sistem $Ax = b$ rešiv, tada se vektor kolona b može napisati kao linearna kombinacija kolona matrice A, pa onda kolone matrica A i B generišu iste prostore i sada, primenom teoreme 17.16, dobija se da je $\boldsymbol{rang}\, A = dim\, W = dim\, V = \boldsymbol{rang}\, B$.

($\Leftarrow$)

Na osnovu teoreme 17.16 sledi da su $\boldsymbol{rang}\, A = dim\, W$ i $\boldsymbol{rang}\, B = dim\, V$, pa je zbog uslova $\boldsymbol{rang}\, A = \boldsymbol{rang}\, B$ $dim\, W = dim\, V$. Kako su W i V konačno dimenzioni vektorski prostori takvi da su $W \subseteq V$ i $dim\, W = dim\, V$, to zbog posledice teoreme 14.35 sledi $W = V$. Sada, zbog $b \in V$ i $W = V$ sledi da je $b \in W$, to jest postoje skalari $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ takvi da je

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + \alpha_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ccccccccc} b_1 & = & a_{11}\alpha_1 & + & a_{12}\alpha_2 & + & \ldots & + & a_{1n}\alpha_n \\ b_2 & = & a_{21}\alpha_1 & + & a_{22}\alpha_2 & + & \ldots & + & a_{2n}\alpha_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ b_m & = & a_{m1}\alpha_1 & + & a_{m2}\alpha_2 & + & \ldots & + & a_{mn}\alpha_n, \end{array}$$

što znači da je sistem S odnosno $Ax = b$ rešiv, jer jedno njegovo rešenje je $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. $\square$

Definicija 11.10 *Trougaoni oblik sistema od m linearnih jednačina sa $n = r + k$ nepoznatih, nad poljem F, čije su nepoznate iz skupa $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \{y_1, y_2, \ldots, y_r, z_1, z_2, \ldots, z_k\}$ (skup od n nepoznatih podeljen je na dva podskupa od r i k nepoznatih, da bi se jednostavnije vršila diskusija), jeste sistem* *jednačina oblika:*

$$\begin{array}{rcrcccrcl}
a_{11}y_1 & + & a_{12}y_2 & + & \dots & + & a_{1r}y_r & = & b_1 + c_{11}z_1 + \dots + c_{1k}z_k \\
 & & a_{22}y_2 & + & \dots & + & a_{2r}y_r & = & b_2 + c_{21}z_1 + \dots + c_{2k}z_k \\
 & & & & & & \vdots & & \vdots \quad\ \vdots \qquad\quad \vdots \\
 & & & & & & a_{rr}y_r & = & b_r + c_{r1}z_1 + \dots + c_{rk}z_k \\
 & & & & & & 0 & = & \lambda \\
 & & & & & & 0 & = & 0 \\
 & & & & & & & \vdots & \\
 & & & & & & 0 & = & 0
\end{array}$$

gde su $a_{11}a_{22}\dots a_{rr} \neq 0$, $a_{ij} \in F$, $b_i \in F$, $c_{il} \in F$ *i* $\lambda \in F$ *za sve indekse* $i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$, *i* $l \in \{1, 2, \dots, k\}$, *pri čemu ako je* r *jednako broju jednačina, tada ne postoje jednakosti* $0 = \lambda$ *i* $0 = 0$.

Matrični oblik ovoga trougaonog sistema glasi

$$\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & -c_{11} & \dots & -c_{1k} \\
0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & -c_{21} & \dots & -c_{2k} \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & a_{rr} & -c_{r1} & \dots & -c_{rk} \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_k \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_r \\ \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

gde opet važi da ako je r jednako broju jednačina, tada ne postoje vrste u prvoj matrici čiji su svi elementi jednaki 0 i u poslednjoj koloni matrici ne postoje λ i nule ispod nje.

Ako su $r = 0$ i $\lambda = 0$, sistem je neodređen a ako su $r = 0$ i $\lambda \neq 0$, sistem je protivrečan.

Neka je sada $r \neq 0$.

Ako je $\lambda \neq 0$, tada je sistem protivrečan. Ako je $\lambda = 0$, sistem je rešiv i dalje se klasifikuje kao sistem ako ima tačno jedno rešenje, a to će se desiti ako i samo ako je $k = 0$, i na neodređen ako je $k \neq 0$, pri čemu se kaže da je njegov stepen neodređenosti jednak k.

Teorema 11.11 *Svaki sistem linearnih jednačina* $S : Ax = b$

$$S: \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}$$

ekvivalentnim transformacijama može se dovesti na trougaoni oblik:

$$\begin{array}{ccccccccc} p_{11}y_1 & + & p_{12}y_2 & + & \dots & + & p_{1r}y_r & = & q_1 + c_{11}z_1 + \dots + c_{1k}z_k \\ & + & p_{22}y_2 & + & \dots & + & p_{2r}y_r & = & q_2 + c_{21}z_1 + \dots + c_{2k}z_k \\ & & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & p_{rr}y_r & = & q_r + c_{r1}z_1 + \dots + c_{rk}z_k \\ & & & & & & 0 & = & \lambda \\ & & & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

$p_{11}p_{22}\dots p_{rr} \neq 0$, *gde su* $r + k = n$ *i* $(y_1, y_2, \dots, y_r, z_1, z_2, \dots, z_k)$ *jeste neka permutacija od* $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Dokaz Neka je B matrica tipa $(m, n+1)$ dobijena od matrice sistema $A = [a_{ij}]_{mn}$ tako što joj je dodata kolona slobodnih članova $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$, odnosno B je proširena matrica sistema S. Sada se matrica B (odnosno sistem S) transformiše ekvivalentnim transformacijama na oblik B', tako da se od njene podmatrice A dobija oblik $\star$, tj. trougaoni oblik iz teoreme 17.15. Sistem koji odgovara matrici B' očevidno je trougaonog oblika. $\square$

Teorema 11.12 *Kvadratni sistem jednačina* S *određen je ako i samo ako je determinanta sistema različita od nule.*

Dokaz Dati sistem S ekvivalentnim transformacijama svedemo na njemu ekvivalentni sistem S_1, koji je u trougaonom obliku. Na osnovu osobina determinanti sledi da je $\det S = 0 \Leftrightarrow \det S_1 = 0$. Prema tome, ako je $\det S \neq 0$, tada je i $\det S_1 \neq 0$, pa u trougaonom obliku sistema S_1, zbog teoreme 17.15, postoji situacija

$$S_1: \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & a_{nn}x_n & = & b_n, \end{array}$$

odakle sledi da je sistem određen, jer je $\det S_1 = a_{11} \dots a_{nn} \neq 0$. Obratno, ako je kvadratni sistem S određen, tada je i njemu ekvivalentni trougaoni sistem S_1 obavezno kvadratni i određen, pa matrica sistema S_1 na glavnoj dijagonali ima sve elemente različite od nule, a ispod nje jednake nuli, što znači da je $\det S_1 \neq 0$ odnosno $\det S \neq 0$.

Teorema 11.13 *Homogeni kvadratni sistem linearnih jednačina ima netrivijalna rešenja, tj. rešenja različita od* $(0, 0, \dots, 0)$, *ako i samo ako je determinanta toga sistema jednaka nuli.*

Dokaz Kako homogeni sistem ne može biti kontradiktoran, za njega preostaju samo mogućnosti da je određen ili neodređen. Po prethodnoj teoremi on je određen ako i samo ako je njegova determinanta različita od nule, što znači ako je determinanta jednaka nuli, tada za njega preostaje jedino mogućnost da je neodređen, to jest da ima netrivijalna rešenja. □

Cela linearna algebra bazira se na sistemima linearrnih jednačina što znaći da svaki problem iz linearne algebre se svodi na neki problem iz sistema linearnih jednačina.

Poglavlje 12

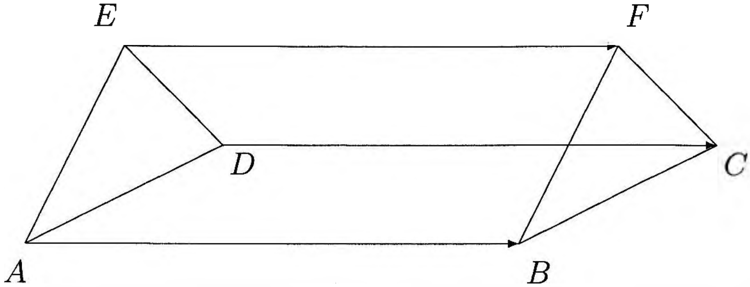
SLOBODNI VEKTORI

Definicija 12.1 *U skupu* $\mathbb{E}^2$ *uređenih parova tačaka prostora* $\mathbb{E}$ *(euklidskog geometrijskog) relacija* ρ *definisana je na sledeći način:*

a) $(A, A)\rho(B, B)$ *za svako* $A \in \mathbb{E}$ *i* $B \in \mathbb{E}$.

b) Ako je $A \neq B$ *i* $C \neq D$, *tada je* $(A, B)\rho(C, D) \Leftrightarrow$ *(duž* AB *je paralelna, podudarna i isto orijentisana kao duž* CD*)* $\Leftrightarrow$ $ABCD$ *je paralelogram.*

Ekvivalentna definicija relacije ρ data je u zadatku 2.32. Još jedna definicija relacije ρ može se dati, i to bez korišćenja podudarnosti! Odnosno, ako su $A \neq B$ i $C \neq D$, tada je $(A, B)\rho(D, C)$ ako i samo ako postoje takve tačke $E, F \in \mathbb{E}$ da su četvorougli $ABFE$ i $DCFE$ paralelogrami, u protivnom je $(A, A)\rho(B, B)$ za sve A i B iz $\mathbb{E}$.



I na osnovu ove definicije može se, bez korišćenja aksioma podudarnosti i njihovih posledica, dokazati teorema 12.6!

Teorema 12.2 *Relacija* ρ *je relacija ekvivalencije.*

Dokaz Sledi iz činjenice da relacije podudarnosti, paralelnosti i iste orijentisanosti jesu relacije ekvivalencije.

Definicija 12.3 *Klase ekvivalencije, s obzirom na relaciju ρ, nazivaju se slobodni vektori.*

Kad nema opasnosti od zabune, slobodni vektori imenuju se kratko samo vektori. Skup svih klasa, tj. slobodnih vektora, obeležavaće se sa $V = \mathbb{E}^2/\rho$. Vektor odnosno klasa ekvivalencije je skup svih parova koji su međusobno paralelni, podudarni i isto orijentisani ili skup svih parova čije su komponente jednake, koji se zove nula vektor.

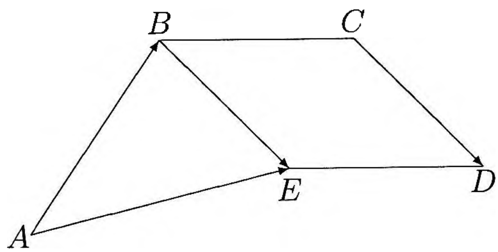
Vektor je skup svih orijentisanih duži, „strelica" koje su međusobno podudarne, paralelne i isto orijentisane.

Vektor je orijentisana duž, „strelica" koja, kada se pomeri paralelno samoj sebi, predstavlja isti vektor.

Vektor čiji je jedan predstavnik (A, B) označavaće se sa $\overrightarrow{AB}$. Specijalno, vektor čiji je predstavnik (A, A) pisaće se kao $\vec{0}$ ili 0.

Definicija 12.4 *U skupu V operacija $+$ definiše se na sledeći način:*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE},\ \textit{gde je tačka } E \textit{ određena sa } \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}\ .$$



Činjenica 12.5

Za bilo koje tri tačke važi $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$

Činjenica 12.5 ujedno je i definicija sabiranja vektora, jer uvek se jedan od vektora sabiraka može paralelno pomeriti tako da se njegov početak poklopi s krajem onoga drugog vektora (sabirka).

Teorema 12.6 $(V, +)$ *je Abelova grupa (videti* 5.5).

Dokaz Sledi iz definicija 12.1, 12.3 i 12.4. Na primer, $\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}$ $= \ldots = \vec{0} = 0$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}= 0$, odakle je $\overrightarrow{AB}= - \overrightarrow{BA}$, dok su komutativnost i asocijativnost očevidne.

Definicija 12.7 *Intenzitet vektora $\overrightarrow{AB}$ $(A \neq B)$ merni je broj duži AB i označava se sa $|\overrightarrow{AB}|$ ili AB, pravac vektora $\overrightarrow{AB}$ $(A \neq B)$ je pravac određen tačkama A i B, a smer vektora $\overrightarrow{AB}$ $(A \neq B)$ je od A prema B. Intenzitet nula vektora ($\vec{0} = 0$) je realni broj 0, neodređenog smera i pravca, pa se uzima da je kolinearan sa svakim vektorom i normalan na svaki vektor.*

Pravac je skup svih pravih koje su međusobno paralelne (zadatak 2.17), a na svakom pravcu postoje dva smera.

Teorema 12.8 *Vektor $\vec{a} \in V$ je jednoznačno određen ako ima zadat intenzitet, pravac i smer na tom pravcu.*

Dokaz Neposredna posledica definicija 12.1, 12.3 i 12.7.

Definicija 12.9 *Operacija množenja realnih brojeva (skalara) α sa vektorima $\vec{a}$ jeste funkcija $\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$ definisana na sledeći način:*

1. *ako su $\alpha \neq 0$ i $\vec{a} \neq 0$ tada:*

   a) $|\alpha \cdot \vec{a}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$,

   b) pravac vektora $\alpha \cdot \vec{a}$ isti je s pravcem vektora $\vec{a}$,

   c) smer vektora $\alpha \cdot \vec{a}$ isti je sa smerom vektora $\vec{a}$ ako je $\alpha > 0$, a suprotan ako je $\alpha < 0$,

2. *ako su $\alpha = 0$ ili $\vec{a} = 0$, tada je $\alpha \cdot \vec{a} = 0$.*

Umesto $\alpha \cdot \vec{a}$ pisaće se samo $\alpha\vec{a}$ ili $\vec{a}\alpha$.

Činjenica 12.10 *Važna činjenica koja se u radu veoma često koristi.*

Za svaki vektor $\vec{a}$ koji ima isti pravac kao i vektor $\vec{b}$, važi da je $\vec{a} = \pm|\vec{a}|\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$, gde se uzima znak + ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ istog smera i znak − ako su suprotnog. Drugim rečima, svaki vektor se može napisati kao njegov intenzitet puta jedinični vektor njegovog pravca.

Teorema 12.11 *Za sve realne brojeve α i β i sve vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ važi:*

$$
\begin{array}{ll}
a) & \alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}, \\
b) & \alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}, \\
c) & (\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}, \\
d) & 1\vec{a} = \vec{a}, \\
e) & \alpha\vec{a} = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \ \vee \ \vec{a} = 0, \\
f) & \alpha\vec{a} = 0 \Leftarrow \alpha = 0 \ \vee \ \vec{a} = 0.
\end{array}
$$

Dokaz Tvrđenje pod b) je ekvivalentno Talesovoj teoremi odnosno teoriji sličnosti trouglova (čiji dokaz nije jednostavan u okviru ovoga kursa i pripada geometriji), dok su preostala tvrđenja neposredne posledice definicija 12.1, 12.3, 12.4 i 12.9.

Primer 12.12

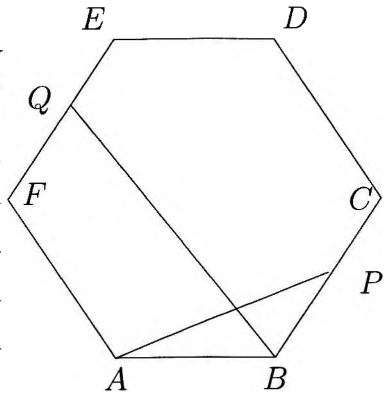
Neka su $ABCDEF$ pravilni šestougao, P i Q sredine redom stranica BC i EF. U zavisnosti od vektora $\vec{a}$ $=\overrightarrow{FE}$ i $\vec{b}$ $=\overrightarrow{AC}$ izraziti vektore: $\overrightarrow{AB}=$ $b - a$

$\overrightarrow{BQ}=$ $7a/2 - 2b$

$\overrightarrow{QC}=$ $-5a/2 + 2b$

$\overrightarrow{DQ}=$ $a/2 - b$

$\overrightarrow{FP}=$ $2b - 5a/2$



Napomena Neka je V neprazan skup čiji su elementi označeni sa $\vec{a}, \vec{b}, \ldots$ a F neko polje čiji su elementi označeni sa $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Tada se $(V, F, +, \cdot)$ naziva vektorski prostor nad poljem F ako važe 12.6 i 12.11. Znači, slobodni vektori su primer (model) vektorskog prostora. Videti 14.1.

Definicija 12.13 *(Vektori su istog pravca) $\Leftrightarrow$ (Vektori su kolinearni) $\Leftrightarrow$ (Vektori leže na istoj pravoj) $\Leftrightarrow$ (Vektori su paralelni). Nula vektor je kolinearan sa svakim vektorom i normalan je na svaki vektor.*

Dva vektora su kolinearna ako i samo ako su linearno zavisni. Kolinearnost vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ označava se sa $\vec{a} \| \vec{b}$.

Sledi ekvivalentna definicija kolinearnosti nenula vektora, koja je vrlo značajna u daljem radu i implementacijama.

Teorema 12.14 *Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni nenula vektori, onda se svaki od njih može zapisati kao proizvod nekog skalara i onog drugog vektora.*

Dokaz Ako je $\vec{a} \neq 0 \wedge \vec{b} \neq 0$, tada postoji takav skalar α da je $\vec{a} = \alpha\vec{b}$, gde je $\alpha = \pm\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$, pri čemu se znak $+$ uzima kada su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ istog smera, u suprotnom, znak $-$. Analogno se pokazuje i slučaj $\vec{b} = \alpha\vec{a}$.

Definicija 12.15 *(Pravci vektora su paralelni jednoj ravni) $\Leftrightarrow$ (Vektori su komplanarni) $\Leftrightarrow$ (Vektori leže u istoj ravni) $\Leftrightarrow$ (Vektori leže u paralelnim ravnima). Nula vektor je komplanaran sa svakim skupom komplanarnih vektora.*

Ako su tri vektora komplanarna, tada se kaže da su linearno zavisni. Kada su vektori linearno zavisni, tada su kolinearni ili komplanarni. Dva vektora su nezavisna akko su nekolinearna, a tri vektora nezavisna akko su nekomplanarna.

Još jedan uslov komplanarnosti vektora je pod b) u sledećoj teoremi.

Teorema 12.16 *Za svaka dva nekolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ važi:*

a) $(\forall\alpha, \beta \in \mathbb{R})\ (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0 \ \Rightarrow\ \alpha = \beta = 0)$,[1]

b) Ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni, tada se bar jedan od njih može zapisati kao linearna kombinacija preostale dvojice (na primer $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ za neke $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pri čemu su α i β jednoznačno određeni). Obratno je očevidno.[2]

Dokaz

a) Pretpostavimo suprotno, na primer da je $\alpha \neq 0$.

Tada je $\vec{a} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{b}$, a odavde, na osnovu definicija 12.9 i 12.13, sledi da je $\vec{a} \| \vec{b}$. Međutim, $\vec{a} \| \vec{b}$ je kontradikcija uslovu teoreme.

b) Ako je $\vec{c}$ kolinearan s nekim od vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, na primer sa $\vec{a}$, tada je na osnovu teoreme 12.14 $\vec{c} = \pm|\vec{c}|\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} + 0 \cdot \vec{b} \ \Leftrightarrow \vec{c} = \pm|\vec{c}|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + 0 \cdot \vec{b}$. U suprotnom, postoje takve četiri komplanarne tačke O, A, B, C da je

[1] Opšta definicija 14.15 linearne nezavisnosti para vektora $(\vec{a}, \vec{b})$.

[2] Definicija 14.18 generatornog para vektora $(\vec{a}, \vec{b})$ slobodnih vektora.

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, jer su $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ komplanarni. Neka prave p i q, koje prolaze kroz C i paralelne su redom sa OA i OB, seku prave određene dužima OB i OA redom u tačkama B_1 i A_1. Očevidno je $\vec{c}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}$, a kako je na osnovu teoreme 12.14, $\overrightarrow{OA_1}=\alpha\,\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB_1}=\beta\,\overrightarrow{OB}$ za neke $\alpha,\beta\in R$, to je $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$. Ako je $\vec{c}=\alpha_1\vec{a}+\beta_1\vec{b}$ tada je $(\alpha-\alpha_1)\vec{a}+(\beta-\beta_1)\vec{b}=0$ i zbog a) sledi $\alpha-\alpha_1=0$ i $\beta-\beta_1=0$ odnosno $\alpha=\alpha_1$ i $\beta=\beta_1$.

Teorema 12.17 *Slobodni vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ komplanarni su za sve vrednosti realnih brojeva α i β, to jest $(\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R})$.*

Dokaz Iz definicija 12.4, 12.9 i 12.15.

Teorema 12.18 *Za svaka tri nekomplanarna vektora $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V$ važi:*

a) $(\forall\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R})\ (\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=0\Rightarrow\alpha=\beta=\gamma=0)$ [3]

b) $(\forall\vec{d}\in V)\ (\exists\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R})\ \ \vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$ *pri čemu su α, β i γ jednoznačno određeni.*[4]

Dokaz

a) Pretpostavimo suprotno, na primer neka je $\alpha\neq 0$. Tada je $\vec{a}=-\frac{\beta}{\alpha}\vec{b}-\frac{\gamma}{\alpha}\vec{c}$, a odavde, na osnovu teoreme 12.17, sledi da su $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ komplanarni, što je kontradikcija uslovu teoreme.

b) Kako su $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ nekomplanarni vektori, to postoje četiri takve nekoplanarne tačke u prostoru O, A, B, C, da je $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ i $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$. Ako je $\vec{d}$ komplanaran sa $\vec{a}$, $\vec{b}$ ili $\vec{a}$, $\vec{c}$ ili $\vec{b}$, $\vec{c}$, dokaz sledi na osnovu teoreme 12.16. U protivnom postoji takva tačka D, koja ne pripada nijednoj od ravni OAB, OAC i OBC da je $\overrightarrow{OD}=\vec{d}$. Neka ravan određena tačkama O, C, D seče ravan trougla OAB po pravoj s i neka prave p i q prolaze kroz D i paralelne su redom sa OC i s. Prava p seče pravu s u tački E, a prava q pravu određenu tačkama O i C u tački F. Sada se dobija da je $\vec{d}=\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$. Kako

[3]Definicija 14.15 linearne nezavisnosti uređene trojke vektora $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

[4]Definicija 14.18 generatorne trojke vektora $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ slobodnih vektora.

su $\overrightarrow{OF}= \gamma\ \overrightarrow{OC}$ (teorema 12.14) i $\overrightarrow{OE}= \alpha\ \overrightarrow{OA} +\beta\ \overrightarrow{OB}$ (teorema 12.16b), sledi $\vec{d} = \gamma\ \overrightarrow{OC} +\alpha\ \overrightarrow{OA} +\beta\ \overrightarrow{OB}= \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$. Jedinstvenost skalara α, β i γ dokazuje se kontradikcijom. Pretpostavimo da je $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} + \gamma_1\vec{c}$, gde je $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (\alpha_1, \beta_1\gamma_1)$. Odavde sledi da je $(\alpha - \alpha_1)\vec{a} + (\beta - \beta_1)\vec{b} + (\gamma - \gamma_1)\vec{c} = 0$, što zbog dokaza pod a) implicira $\alpha - \alpha_1 = \beta - \beta_1 = \gamma - \gamma_1 = 0$, odnosno $(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$. Kontradikcija!

Teoreme 12.16 i 12.18 imaju široku primenu u dokazivanju mnogih teorema iz geometrije i u rešavanju zadataka iz geometrije, na primer zadaci 12.57 i 12.59. Posledica teorema 12.16 i 12.17 jeste da za svaka dva nekolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, skup svih takvih vektora $\vec{c}$ da su $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ komplanarni, jednak je podskupu skupa slobodnih vektora $W = \{\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} | \alpha \in \mathbb{R} \land \beta \in \mathbb{R}\}$.

Slede dve izuzetno važne definicije, koje imaju bitnu ulogu u lakšem i bržem rešavanju mnogih geometrijskih zadataka, pomoću njih se definišu brojni pojmovi fizike, a linearna algebra je nezamisliva bez njih.

Definicija 12.19 *Neka je V skup svih slobodnih vektora. Tada je skalarni proizvod vektora operacija $\cdot : V^2 \to \mathbb{R}$ definisana ovako:*

$$(\forall\vec{a}, \vec{b} \in V)\ \ \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}| \cos \measuredangle (\vec{a}, \vec{b}).$$

Dalje se umesto $\vec{a} \cdot \vec{b}$ piše samo $\vec{a}\vec{b}$. Može se uzeti $\measuredangle (\vec{a}, \vec{b}) \in [0, \pi]$.

Definicija 12.20 $\mathbf{pr}_{\vec{a}} : V \to \{\alpha\vec{a} | \alpha \in \mathbb{R}\}$, $\vec{a} \neq 0$ *jeste funkcija*

$$\mathbf{pr}_{\vec{a}}(\vec{x}) = |\vec{x}| \cos \measuredangle (\vec{x}, \vec{a})\ \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{x}\vec{a}}{|\vec{a}|}\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a}\vec{x}}{\vec{a}\vec{a}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{x}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}.$$

Projekcija vektora $\vec{x}$ na pravac vektora $\vec{a}$ ($\mathbf{pr}_{\vec{a}}\mathbf{x}$) jeste VEKTOR.
Algebarska projekcija vektora $\vec{x}$ na pravac vektora $\vec{a}$ je BROJ $\frac{\vec{a}\vec{x}}{|\vec{a}|}$.
Za $|\vec{q}| = 1$, $\mathbf{pr}_{\vec{q}}(\vec{x}) = (\vec{q}\vec{x})\vec{q}$, a algebarska projekcija na pravac vektora $\vec{q}$ je $\vec{q}\vec{x}$ odnosno

$$\vec{q}\vec{x} = \begin{cases} |\mathbf{pr}_{\vec{q}}(\vec{x})| & \text{za } \measuredangle(\vec{q}, \vec{x}) \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -|\mathbf{pr}_{\vec{q}}(\vec{x})| & \text{za } \measuredangle(\vec{q}, \vec{x}) \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

Činjenica 12.21

Projekcija vektora $\vec{x}$ *na pravac vektora* $\vec{a}$ *je* vektor $\mathbf{pr}_{\vec{a}}(\vec{x})$ *kolinearan s vektorom* $\vec{a}$, *njegov intenzitet je* $|\vec{x}|\cos\sphericalangle(\vec{x},\vec{a})$, *smer isti s vektorom* $\vec{a}$ *ako je ugao* $\sphericalangle(\vec{x},\vec{a})$ *oštar, a smer suprotan vektoru* $\vec{a}$ *ako je taj ugao tup. Sve to ekvivalentno je s jednakosti* $\mathbf{pr}_{\vec{a}}(\vec{x}) = \frac{\vec{a}\vec{x}}{\vec{a}\vec{a}}\vec{a}$.
Algebarska projekcija vektora $\vec{x}$ *na pravac vektora* $\vec{a}$ *je* broj $\frac{\vec{a}\vec{x}}{|\vec{a}|} \in \mathbb{R}$.

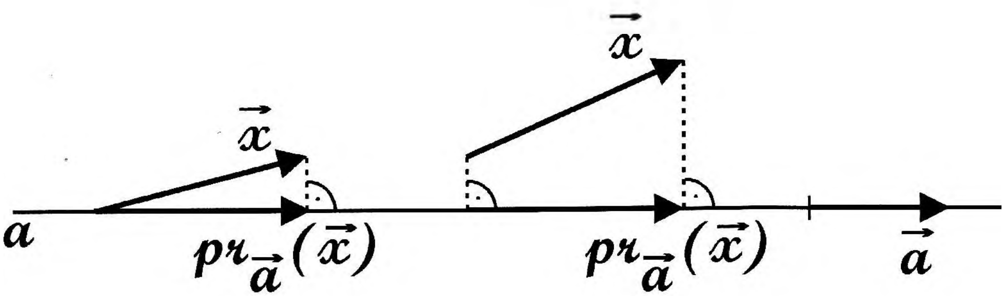


Figure 12.1:

Sledeće stranice prikazaće neke vrlo važne primene skalarnog (unutrašnjeg) proizvoda vektora.

Teorema 12.22 *Za sve vektore* $\vec{x}$ *i* $\vec{n}$ *važi da je* $\vec{x} - \mathbf{pr}_{\vec{n}}(\vec{x}) \perp \vec{n}$ *i ako je ravan* $\pi \perp \vec{n}$, *tada je vektor* $\vec{x} - \mathbf{pr}_{\vec{n}}(\vec{x})$ *projekcija vektora* $\vec{x}$ *na ravan* π, *to jest* $\mathbf{pr}_{\pi}(\vec{x}) = \vec{x} - \mathbf{pr}_{\vec{n}}(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{\vec{n}\vec{x}}{\vec{n}\vec{n}}\vec{n}$. *Videti* 12.23.

Ako je $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k} = (x_1, x_2, x_3)$ vektor položaja tačke $A(x_1, x_2, x_3)$ (videti 13.1) i $\vec{q} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, tada vektor

$$\mathbf{pr}_{\vec{a}}(\vec{x}) = \frac{\vec{a}\vec{x}}{\vec{a}\vec{a}}\vec{a} = \mathbf{pr}_{\vec{q}}(\vec{x}) = (\vec{q}\vec{x})\vec{q} = y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k} = (y_1, y_2, y_3) = \vec{y}$$

jeste vektor položaja tačke $A'(y_1, y_2, y_3)$, gde je A' projekcija tačke A na pravu a koja sadrži koordinatni početak i paralelna je sa vektorom $\vec{a}$. Vektori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ su jedinični međusobno normalni. Videti 12.48. Vektor $\vec{x} - \mathbf{pr}_{\vec{a}}(\vec{x})$ uvek je normalan na vektor $\vec{a}$ odnosno pravu a.

Teorema 12.22 ključni je korak u Gram-Šmitovom algoritmu ortogonalizacije baze vektorskog prostora i QR faktorizacije!

Definicija 12.23 *Funkcija* $\mathbf{pr}_\pi : V \to V$ *preslikava proizvoljni vektor* $\overrightarrow{AB}$ *na vektor* $\overrightarrow{A'B'}$, *gde su* A' *i* B' *projekcije tačaka* A *i* B *na ravan* π *i kaže se da je vektor* $\overrightarrow{A'B'}$ *projekcija vektora* $\overrightarrow{AB}$ *na ravan* π.

Teorema 12.24 *Ako je ravan* $\pi \perp \vec{n}$, *tada je*

$$\mathbf{pr}_\pi(\vec{x}) = \vec{x} - \mathbf{pr}_{\vec{n}}(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{\vec{n}\vec{x}}{\vec{n}\vec{n}}\vec{n}$$

Videti 12.22.

Teorema 12.25 *Za svaki vektor* $\vec{x}$ *važi da je* $\vec{x} - \mathbf{pr}_\pi(\vec{x})$ *normalan na ravan* π.

Dokaz je direktna posledica definicije sabiranja vektora i definicije projekcije vektora na ravan π, tj. na potprostor generisan nekolinearnim vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ koji su paralelni sa ravni π.

Teorema 12.26 Ako je $\vec{q}$ jedinični vektor, tada je

$$a)\ \mathbf{pr}_{\vec{q}}(\vec{x}) = (\vec{q}\vec{x})\vec{q}$$

$$b)\ |\mathbf{pr}_{\vec{q}}(\vec{x})| = \pm\vec{q}\vec{x} = \begin{cases} \vec{q}\vec{x} & za \quad \sphericalangle(\vec{q},\vec{x}) \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -\vec{q}\vec{x} & za \quad \sphericalangle(\vec{q},\vec{x}) \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

Oznaka $\mathbf{pr}_{\vec{a}}(\vec{x})$ čita se kao: Projekcija vektora $\vec{x}$ na pravac vektora $\vec{a}$. Kako je $\mathbf{pr}_{\vec{a}}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}\vec{a}}{|\vec{a}|}\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, odnosno $|\vec{x}\vec{a}| = |\vec{a}||\mathbf{pr}_{\vec{a}}(\vec{x})|$, to ima veliku primenu u zadacima i govori o tesnoj vezi skalarnog proizvoda i projekcije vektora na pravac nekog drugog vektora, jer ako je $\vec{q}$ jedinični vektor, tada je

$$|\vec{x}\vec{q}| = |\mathbf{pr}_{\vec{q}}(\vec{x})|.$$

Teorema 12.27 Skalarno množenje vektora $\vec{x}$ jediničnim vektorom $\vec{q}$ algebarska je projekcija vektora $\vec{x}$ na pravac vektora $\vec{q}$. Vektorska funkcija $\mathbf{P} = \mathbf{pr}_{\vec{q}}$ uvek je idempotentna linearna transformacija, tj. $\mathbf{pr}_{\vec{q}} \circ \mathbf{pr}_{\vec{q}} = \mathbf{pr}_{\vec{q}}$ odnosno $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$, gde je $\circ$ kompozicija funkcija. Videti teoremu 12.29 i definiciju 15.1. Zbog toga, ovakve funkcije $\mathbf{P}$, to jest idempotentne linearne transformacije nazivaju se i **PROJEKTORI**.

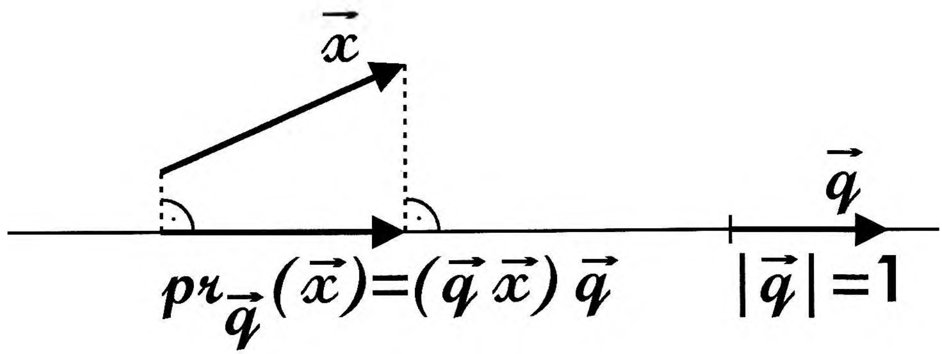


Figure 12.2:

Teorema 12.28 *Vektorska funkcija* $F = \mathbf{ref}_{\vec{a}} : V \to V$ *definisana sa* $\mathbf{ref}_{\vec{a}}(\vec{x}) = 2\mathbf{pr}_{\vec{a}}(\vec{x}) - \vec{x}$ *jeste involutorna, tj.* $F(F(\vec{x})) = \vec{x}$, *odnosno* $F^{-1} = F$. *Involutorne funkcije nazivaju se i* **REFLEKTORI**. *Ova funkcija u geometrijskoj interpretaciji: ako slobodni vektor* $\vec{x} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ *intepretiramo tačkom* $A(x, y, z)$, *predstavlja* **osnu simetriju** *čija je osa paralelna s vektorom* $\vec{a}$ *i sadrži* $O(0, 0, 0)$.

Teorema 12.29 *Neka su* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *i* $\vec{c} \neq 0$ *vektori i* λ *realan broj. Tada*

$$a)\quad \mathbf{pr}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) = \mathbf{pr}_{\vec{c}}(\vec{a}) + \mathbf{pr}_{\vec{c}}(\vec{b}),$$
$$b)\quad \mathbf{pr}_{\vec{c}}(\lambda\vec{a}) = \lambda\mathbf{pr}_{\vec{c}}(\vec{a}).$$

odnosno $\mathbf{pr}_{\vec{c}}$ *je linearna transformacija. Videti* 15.1.

Dokaz je očevidan sa slike. Evo još jednog dokaza.

Kako se normalnom projekcijom održava paralelnost i kako se normalnom projekcijom čuva i homotetija sa centrom u $O(0, 0)$ zbog Talesove teoreme, to korišćenjem teoreme 12.29, tj. geometrijske definicije linearnosti koja kaže da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linearna akko održava paralelnost i sve homotetije sa centrom u $O(0, 0)$, sledi dokaz. Videti 15.4

Drugim rečima, distributivnost skalarnog proizvoda i linearnost jesu ekvivalentne činjenice, pod uslovom da je $\mathbf{pr}_{\vec{c}}(\lambda\vec{x}) = \lambda\mathbf{pr}_{\vec{c}}(\vec{x})$, što naravno važi zbog Talesove teoreme.

Teorema 12.30 *Projekcija zbira vektora na ravan* π *jednaka je zbiru projekcija tih vektora na ravan* π *odnosno*

$$\mathbf{pr}_{\pi}(\vec{a}+\vec{b}) = \mathbf{pr}_{\pi}(\vec{a}) + \mathbf{pr}_{\pi}(\vec{b}),$$

$$\mathbf{pr}_\pi(\lambda\vec{a}) = \lambda\mathbf{pr}_\pi(\vec{a}).$$

Dokaz Analogan dokazu teoreme 12.29.

Funkcije kao što je $\mathbf{pr}_{\vec{c}}$, za koje važi teorema 12.29 i funkcije $\mathbf{pr}_\pi$ za koje važi teorema 12.30, nazivaju se **linearne transformacije.** Videti 15.1.

Definicija 12.31 *Nula vektor je normalan na svaki vektor.*

Teorema 12.32 $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$

$a)$ $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2 \Leftrightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\vec{a}},$
$b)$ $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a},$
$c)$ $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b} = 0,$
$d)$ $(\forall\alpha \in \mathbb{R})\alpha(\vec{a}\vec{b}) = (\alpha\vec{a})\vec{b} = \vec{a}(\alpha\vec{b}),$
$e)$ $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c} \Leftarrow \mathbf{pr}_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c}) = \mathbf{pr}_{\vec{a}}(\vec{b}) + \mathbf{pr}_{\vec{a}}(\vec{c})$

Dokaz pod e) sledi iz $\mathbf{pr}_{\vec{u}}(\vec{w}) = \frac{\vec{u}\vec{w}}{\vec{u}\vec{u}}\vec{u} = \frac{\vec{u}\vec{w}}{|\vec{u}|^2}\vec{u}$ za $\vec{u} \neq 0 \wedge \vec{a} \neq 0$, dok za $\vec{a} = 0$ distributivnost skalarnog proizvoda u odnosu na sabiranje vektora je očevidna.

Definicija 12.33 *Skup vektora $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ortonormiran je ako je svaki od njih jedinični i ako su svaka dva međusobno normalna (ortogonalna). Uređena n-torka vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ortonormirana je akko je $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ortonormiran. Realna matrica U čije kolone su ortonormirani vektori, tj. $U^\top U = I$, naziva se* **ORTOGONALNA** *ili* **UNITARNA**.

Ekvivalentna definicija za definiciju 12.23 jeste sledeća teorema, koja se može uopštiti kao definicija projekcije na vektorski potprostor generisan n-torkom ortonormiranih vektora $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$.

Teorema 12.34 *Ako su $\vec{q_1}$ i $\vec{q_2}$ jedinični međusobno normalni vektori odnosno $\{\vec{q_1}, \vec{q_2}\}$ ortonormirani skup vektora, tada $(\vec{q_1}\vec{x})\vec{q_1} + (\vec{q_2}\vec{x})\vec{q_2}$ jeste projekcija vektora $\vec{x}$ na ravan π paralelnu sa vektorima $\vec{q_1}$ i $\vec{q_2}$ tj.* $\mathbf{pr}_\pi(\vec{x}) = \mathbf{pr}_{\vec{q_1}}(\vec{x}) + \mathbf{pr}_{\vec{q_2}}(\vec{x}) = (\vec{q_1}\vec{x})\vec{q_1} + (\vec{q_2}\vec{x})\vec{q_2} = \sum_{i=1}^{2}(\vec{q_i}\vec{x})\vec{q_i}$, *a* $\vec{r} = \vec{x} - \mathbf{pr}_\pi(\vec{x}) = \vec{x} - \sum_{i=1}^{2}(\vec{q_i}\vec{x})\vec{q_i}$ *je normalan na $\vec{q_1}$ i $\vec{q_2}$, tj. na π i $\vec{r}$ je projekcija vektota $\vec{x}$ na vektor $\vec{n}$ normale ravni π tj. $\vec{r} = \mathbf{pr}_{\vec{n}}(\vec{x}) = (\vec{q_3}\vec{x})\vec{q_3}$, gde je $\vec{q_3}$ jedinični vektor istog smera i pravca sa $\vec{r}$.* (Vidi 12.25.)

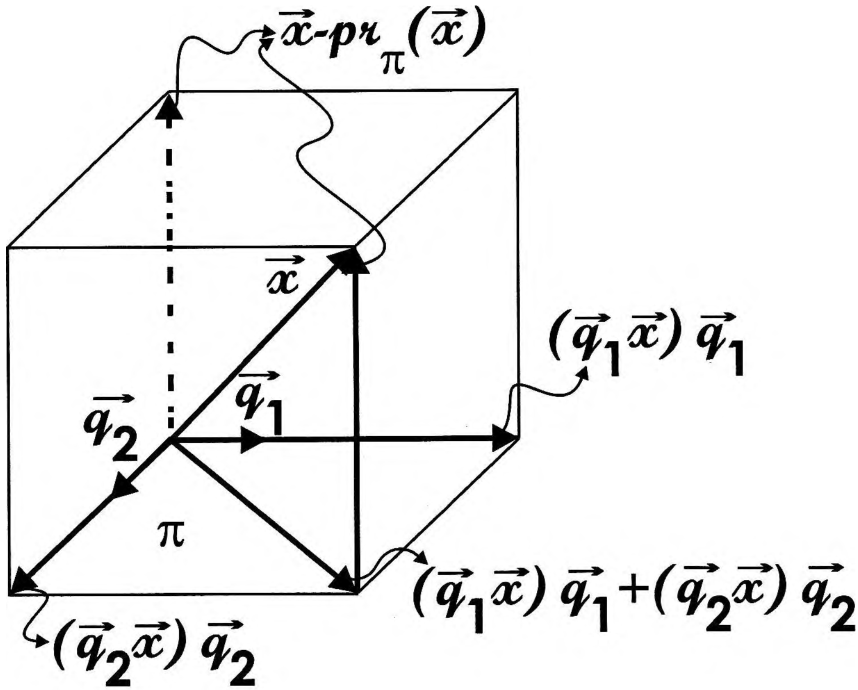


Figure 12.3:

Funkcija $P(\vec{x}) = \mathbf{pr}_\pi(\vec{x}) = (\vec{q_1}\vec{x})\vec{q_1} + (\vec{q_2}\vec{x})\vec{q_2} = \sum_{i=1}^{2}(\vec{q_i}\vec{x})\vec{q_i}$ jeste linearna transformacija, koja je projektor ($P^2 = P$), projektuje svaki vektor na prostor generisan vektorima $\vec{q_1}$ i $\vec{q_2}$. U geometrijskoj interpretaciji to je projekcija na ravan π paralelnu vektorima $\vec{q_1}$ i $\vec{q_2}$. Videti sledeću sliku 12.3.

Dokaz Kako je $(\vec{q}_1\vec{x})\vec{q}_1$ projekcija vektora $\vec{x}$ na pravac jediničnog vektora $\vec{q}_1$ i $(\vec{q}_2\vec{x})\vec{q}_2$ projekcija vektora $\vec{x}$ na pravac jediničnog vektora $\vec{q}_2$, to je njihov zbir dijagonala pravougaonika čije su stranice $|\vec{q}_1\vec{x}|$ i $|\vec{q}_2\vec{x}|$, jer su $\vec{q}_1$ i $\vec{q}_2$ jedinični i međusobno normalni. Sada je jasno da je $\vec{x}$ telesna dijagonala kvadra (pravouglog paralelopipeda), čija je projekcija na ravan pomenutog pravougaonika baš njegova dijagonala $(\vec{q}_1\vec{x})\vec{q}_1 + (\vec{q}_2\vec{x})\vec{q}_2$, a vektor $\vec{r}$ projekcija vektora $\vec{x}$ na visinu kvadra.

Teorema 12.35 *Ako su $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$ i $\vec{q}_3$ jedinični, međusobno normalni vektori odnosno $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3\}$ ortonormirani skup (baza) vektora, tada je*

$$(\forall \vec{x} \in V)\, \vec{x} = \mathbf{pr}_{\vec{q}_1}(\vec{x}) + \mathbf{pr}_{\vec{q}_2}(\vec{x}) + \mathbf{pr}_{\vec{q}_3}(\vec{x}) = (\vec{q}_1\vec{x})\vec{q}_1 + (\vec{q}_2\vec{x})\vec{q}_2 + (\vec{q}_3\vec{x})\vec{q}_3$$

Dokaz $\vec{x} = \alpha_1\vec{q_1} + \alpha_2\vec{q_2} + \alpha_3\vec{q_3} \Rightarrow \vec{q_1}\vec{x} = \vec{q_1}(\alpha_1\vec{q_1} + \alpha_2\vec{q_2} + \alpha_3\vec{q_3}) \Rightarrow$ $\vec{q_1}\vec{x} = \alpha_1$. Analogno je i $\vec{q_2}\vec{x} = \alpha_2$ i $\vec{q_3}\vec{x} = \alpha_3$.

~~**Teorema 12.36**~~ *Vektorska funkcija* $F = \mathbf{ref}_\pi : V \to V$ *definisana sa* $\mathbf{ref}_\pi(\vec{x}) = 2\mathbf{pr}_\pi(\vec{x}) - \vec{x}$ *jeste involutorna,* $F(F(\vec{x})) = \vec{x}$, *tj.* $F^{-1} = F$. *Involutorne funkcije nazivaju se i* **REFLEKTORI**. *U geometrijskoj interpretaciji* F *je ravanska simetrija u odnosu na ravan* π.

~~**Teorema 12.37**~~ *Gram-Šmitov algoritam. Neka su* $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ *i* $\vec{a}_3$ *nekomplanarni (linearno nezavisni) vektori i ravan* π *paralelna s vektorima* $\vec{a}_1$ *i* $\vec{a}_2$. *Tada su vektori*

$$\vec{q_1} = \pm\frac{\vec{a_1}}{|\vec{a_1}|},$$

$$\vec{q_2} = \pm\frac{\vec{a}_2 - \mathbf{pr}_{\vec{q_1}}(\vec{a}_2)}{|\vec{a}_2 - \mathbf{pr}_{\vec{q_1}}(\vec{a}_2)|} = \frac{\vec{a}_2 - (\vec{q_1}\vec{a}_2)\vec{q_1}}{|\vec{a}_2 - (\vec{q_1}\vec{a}_2)\vec{q_1}|} \quad i \qquad \textit{Videti } 12.26$$

$$\vec{q_3} = \pm\frac{\vec{a}_3 - \mathbf{pr}_\pi(\vec{a}_3)}{|\vec{a}_3 - \mathbf{pr}_\pi(\vec{a}_3)|} = \frac{\vec{a}_3 - \mathbf{pr}_{\vec{q_1}}(\vec{a}_3) - \mathbf{pr}_{\vec{q_2}}(\vec{a}_3)}{|\vec{a}_3 - \mathbf{pr}_{\vec{q_1}}(\vec{a}_3) - \mathbf{pr}_{\vec{q_2}}(\vec{a}_3)|} = \frac{\vec{a}_3 - (\vec{q_1}\vec{a}_3)\vec{q_1} - (\vec{q_2}\vec{a}_3)\vec{q_2}}{|\vec{a}_3 - (\vec{q_1}\vec{a}_3)\vec{q_1} - (\vec{q_2}\vec{a}_3)\vec{q_2}|}. \quad 12.34$$

jedinični i međusobno normalni, a $(\vec{q_1}, \vec{q_2}, \vec{q_3})$ *ortonormirana baza.*

Ovih osam triedara $(\vec{q_1}, \vec{q_2}, \vec{q_3})$ određuju osam oktanata. Da li su ovo jedini triedri za dati triedar $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$? Jesu, ukoliko je $L(\vec{a}_1) = L(\vec{q_1})$ ($\vec{a}_1$ i $\vec{q_1}$ kolinearni), $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = L(\vec{q_1}, \vec{q_2})$ (ravan određena sa $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$ paralelna s ravni određenom sa $\vec{q_1}$ i $\vec{q_2}$) Videti 14.9.

Ako se sve izrazi u matričnoj formi, odnosno uvedu oznake

$$a_1 = \vec{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \qquad a_2 = \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} \qquad a_3 = \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$$

$$q_1 = \vec{q_1} = \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ q_{31} \end{bmatrix} \qquad q_2 = \vec{q_2} = \begin{bmatrix} q_{12} \\ q_{22} \\ q_{32} \end{bmatrix} \qquad q_3 = \vec{q_3} = \begin{bmatrix} q_{13} \\ q_{23} \\ q_{33} \end{bmatrix}$$

tada se teorema 12.37 može zapisati i u matričnom obliku:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{bmatrix} = Q \cdot R \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad a_1 = r_{11}q_1 \ \wedge \ a_2 = r_{12}q_1 + r_{22}q_2 \ \wedge \ a_3 = r_{13}q_1 + r_{23}q_2 + r_{33}q_3,$$

gde su $r_{11} = |\vec{a}_1|$, $r_{22} = |\vec{a}_2 - (\vec{q_1}\vec{a}_2)\vec{q_1}|$ $r_{33} = |\vec{a}_3 - (\vec{q_1}\vec{a}_3)\vec{q_1} - (\vec{q_2}\vec{a}_3)\vec{q_2}|$
$r_{12} = \vec{q_1}\vec{a}_2$, $r_{13} = \vec{q_1}\vec{a}_3$, $r_{23} = \vec{q_2}\vec{a}_3$, pa je algoritam (redosled) izračunavanja brojeva r_{ij} i vektora $\vec{q_i}$

$$r_{11} = |\vec{a}_1|, \qquad \vec{q_1} = \frac{\vec{a}_1}{r_{11}}, \qquad r_{12} = \vec{q_1}\vec{a}_2, \qquad r_{13} = \vec{q_1}\vec{a}_3, \qquad r_{22} = |\vec{a}_2 - r_{12}\vec{q_1}|,$$

$$\vec{q_2} = \frac{\vec{a}_2 - r_{12}\vec{q_1}}{r_{22}}, \qquad r_{23} = \vec{q_2}\vec{a}_3, \qquad r_{33} = |\vec{a}_3 - r_{13}\vec{q_1} - r_{23}\vec{q_2}| \qquad \vec{q_3} = \frac{\vec{a}_3 - r_{13}\vec{q_1} - r_{23}\vec{q_2}}{r_{33}}.$$

Ovaj algoritam dobijanja ortonormiranog triedra vektora (q_1, q_2, q_3) od triedra (a_1, a_2, a_3) jeste Gram-Šmitov algoritam ortogonalizacije, a $A = Q \cdot R$ naziva se QR faktorizacija matrice A. Dekompozicija $A = QR$ jeste QR faktorizacija matrice A akko su kolone matrice Q ortonormirani skup vektora (Q je ortogonalna odnosno unitarna) i matrica R gornja trougaona i regularna, tj. $\det R \neq 0$. Da li je QR faktorizacija regularne matrice A jednoznačna ako je $L(a_1) = L(q_1)$, $L(a_1, a_2) = L(q_1, q_2)$ i $L(a_1, a_2, a_3) = L(q_1, q_2, q_3)$, gde su $L(a_1, \ldots, a_n) =< a_1, \ldots, a_n >$ oznake za prostor generisan vektorima $a_1, \ldots, a_n$? Jeste do naznake $\pm$ ispred r_{11}, r_{22} i r_{33}. Jasno je da je $Q^{\top}Q = I$ to jest $\det Q = \pm 1 \neq 0$, što sa nezavisnošću vetora $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ i $\vec{a}_3$ implicira $\det A \neq 0$ ili $r_{11} \neq 0, r_{22} \neq 0$ i $r_{33} \neq 0$. Videti 10.24 i 10.10. Podsetimo još jednom na važne oznake

$$\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k} = (x_1, x_2, x_3) \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x = [x_1\, x_2\, x_3]^{\top}.$$

Definicija 12.38 *Uređena trojka nekomplanarnih slobodnih vektora nazvaće se triedar vektora ili baza prostora slobodnih vektora.*

Definicija 12.39 *U skupu τ svih triedara vektora može se na sledeći način definisati specijalna relacija ρ. Neka su $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ i $(\vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{c}_1)$ triedri. Tada postoje tačke O, A, B, C, A_1, B_1 i C_1 takve da su $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $\vec{a}_1 = \overrightarrow{OA_1}$, $\vec{b}_1 = \overrightarrow{OB_1}$ i $\vec{c}_1 = \overrightarrow{OC_1}$. Uočimo rotaciju oko prave kroz tačku O normalne na ΔOAA_1 koja tačke A, B, C preslikava u tačke A', B', C' tako da tačke O, A' i A_1 budu kolinearne i da A' i A_1 budu s iste strane tačke O. Uočimo i rotaciju oko prave kojoj pripadaju tačke O, A_1 i A' i koja tačke B' i C' preslikava u tačke B'' i C'' tako da B'' pripadne ravni ΔOA_1B_1 i B'' i B_1 budu s iste strane prave OA_1. Sada se može reći da je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\rho(\vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{c}_1)$ ako i samo ako su C'' i C_1 s iste strane ravni ΔOA_1B_1.*

Teorema 12.40 *Relacija ρ iz prethodne definicije jeste relacija ekvivalencije i faktor skup ima tačno dva elementa odnosno dve klase ekvivalencije.*

Definicija 12.41 *Klasa ekvivalencije iz prethodne teoreme kojoj pripada triedar $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ nazvaće se skup desnih triedara, gde je $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ unapred fiksirani triedar jediničnih vektora od kojih su svaka dva normalna, a druga klasa skup levih triedara.*

Napomenimo da se desni triedar ne može definisati ukoliko se ne fiksira neki triedar i proglasi desnim, a svi koji su iste orijentacije s njim su desni!

Da li je korektna definicija: triedar vektora $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je desne orijentacije akko je

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} > 0, \quad \text{videti 12.55}$$

gde je $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$?

Naravno da nije, jer prethodna nejednakost govori samo da su triedri $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ i $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ iste orijentacije (i ništa više)! Ukoliko se prethodno definiše da je triedar $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ desne orijentacije, onda je prethodna definicija korektna.

Drugim rečima, ne može se matematički definisati šta je desni triedar ako se ne fiksira jedan triedar i proglasi za desni! (makar bio i levi!!!).

Ova konfuzija nastaje jer su ljudska bića svesna desne i leve ruke. Prva tri prsta desne ruke čine desni triedar, a leve ruke levi triedar.

Od svih šest uređenih trojki čije su komponente različiti elementi skupa nekomplanarnih vektora $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, tri su desni, a tri levi triedar. Cikličkim permutovanjem vektora u triedru orijentacija se ne menja, jer cikličkim permutovanjima vrsta determinanti matrice znak determinante se ne menja.

Zadatak 12.42 *Neka je $(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3})$ uređena trojka nekomplanarnih vektora (triedar vektora).*

a) *U zavisnosti od vektora $\vec{a_1}, \vec{a_2}$ i $\vec{a_3}$ i operacija sabiranja vektora, množenja skalara i vektora, intenziteta vektora i skalarnog proizvoda vektora, izraziti sve triedare $(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3)$ jediničnih, međusobno normalnih vektora, takvih da je $\vec{q}_1$ kolinearan sa $\vec{a}_1$, a vektori $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$ komplanarni, svi paralelni jednoj istoj ravni.*

b) *Koji od tih triedara $(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3)$ ima istu orijentaciju s triedrom $(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3})$?*

Rešenje a) *Jedno rešenje je triedar $(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3) = (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$, gde su*
$\vec{r}_1 = \frac{\vec{a_1}}{|\vec{a_1}|}$, $\vec{r}_2 = \frac{\vec{a}_2 - (\vec{r}_1 \vec{a}_2)\vec{r_1}}{|\vec{a}_2 - (\vec{r}_1 \vec{a}_2)\vec{r_1}|}$ *i* $\vec{r}_3 = \frac{\vec{a}_3 - (\vec{r}_1 \vec{a}_3)\vec{r_1} - (\vec{r}_2 \vec{a}_3)\vec{r_2}}{|\vec{a}_3 - (\vec{r}_1 \vec{a}_3)\vec{r_1} - (\vec{r}_2 \vec{a}_3)\vec{r_2}|}$, *a sva rešenja su*

$$(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3) \in \{(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3), (\vec{r}_1, \vec{r}_2, -\vec{r}_3), (\vec{r}_1, -\vec{r}_2, \vec{r}_3), (\vec{r}_1, -\vec{r}_2, -\vec{r}_3), (-\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3), (-\vec{r}_1, \vec{r}_2, -\vec{r}_3), (-\vec{r}_1, -\vec{r}_2, \vec{r}_3), (-\vec{r}_1, -\vec{r}_2, -\vec{r}_3)\}.$$

b) *Iste orijentacije sa trijedrom $(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3})$ jesu*

$(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3), (\vec{r}_1, -\vec{r}_2, -\vec{r}_3), (-\vec{r}_1, \vec{r}_2, -\vec{r}_3)$ *i* $(-\vec{r}_1, -\vec{r}_2, \vec{r}_3)$.

Definicija 12.43 *U skupu V definiše se operacija $\times$ na sledeći način: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ akko je pravac vektora $\vec{c}$ normalan na pravce vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, intenzitet $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \measuredangle (\vec{a}, \vec{b})$ a smer je određen time da uređena trojka vektora $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ bude desni triedar. Ova operacija naziva se vektorski proizvod.*

Da li su $\vec{r}_1 = \frac{\vec{a_1}}{|\vec{a_1}|}$, $\vec{r}_3 = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}$ i $\vec{r}_2 = \vec{r}_3 \times \vec{r}_1$, gde su $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ i $\vec{r}_3$ vektori iz rešenja zadatka 12.42?

Definicija ekvivalentna definiciji 12.43 može se dobiti pomoću skalarnog proizvoda i teoreme 12.37 primenjene na triedar vektora $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Teorema 12.44 *Neka je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ triedar vektora, odnosno $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ trojka nekomplanarnih (linearno nezavisnih) vektora. Tada je*

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{cases} \vec{q}_3 |\vec{a}||\vec{b}| \sin \measuredangle (\vec{a}, \vec{b}) & \text{ako je } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \text{ desne orijentacije} \\ -\vec{q}_3 |\vec{a}||\vec{b}| \sin \measuredangle (\vec{a}, \vec{b}) & \text{ako je } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \text{ leve orijentacije} \end{cases}$$

gde su $\vec{q}_1 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $\vec{q}_2 = \frac{\vec{b} - (\vec{q}_1 \vec{b})\vec{q}_1}{|\vec{b} - (\vec{q}_1 \vec{b})\vec{q}_1|}$, $\vec{q}_3 = \frac{\vec{c} - (\vec{q}_1 \vec{c})\vec{q}_1 - (\vec{q}_2 \vec{c})\vec{q}_2}{|\vec{c} - (\vec{q}_1 \vec{c})\vec{q}_1 - (\vec{q}_2 \vec{c})\vec{q}_2|}$. *Da li $\vec{a} \times \vec{b}$ zavisi od $\vec{c}$?*

Da li $|\vec{a} \times \vec{b}|$ zavisi od $\vec{c}$? Jesu li su triedri $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ i $(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3)$ uvek iste orijentacije?

Zadatak 12.45 *Neka je* $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ *triedar vektora desne orijentacije i neka je* $\vec{q}_1 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $\vec{q}_2 = \frac{\vec{b}-(\vec{q}_1\vec{b})\vec{q}_1}{|\vec{b}-(\vec{q}_1\vec{b})\vec{q}_1|}$ *i* $\vec{q}_3 = \frac{\vec{c}-(\vec{q}_1\vec{c})\vec{q}_1-(\vec{q}_2\vec{c})\vec{q}_2}{|\vec{c}-(\vec{q}_1\vec{c})\vec{q}_1-(\vec{q}_2\vec{c})\vec{q}_2|}$. *Dokazati da je*

a) $\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|} = \vec{q}_3$

b) $(\vec{q}_1,\vec{q}_2,\vec{q}_3)$ *triedar uvek iste orijentacije sa triedrom* $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

Teorema 12.46 $(\forall\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V)$ $(\forall\alpha\in\mathbb{R})$ *važi:*

$$\begin{aligned}
&a) \quad \vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a}),\\
&b) \quad \alpha(\vec{a}\times\vec{b}) = (\alpha\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\alpha\vec{b}),\\
&c) \quad \vec{a}\|\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b} = 0,\\
&d) \quad \vec{a}\times\vec{a} = 0,\\
&e) \quad \vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b} = 0.
\end{aligned}$$

Dokaz su direktne posledice definicija.

Teorema 12.47 *Za proizvoljne vektore* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *i* $\vec{c}$ *važi* $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$, *odnosno distributivni zakon vektorskog proizvoda u odnosu na sabiranje vektora.*

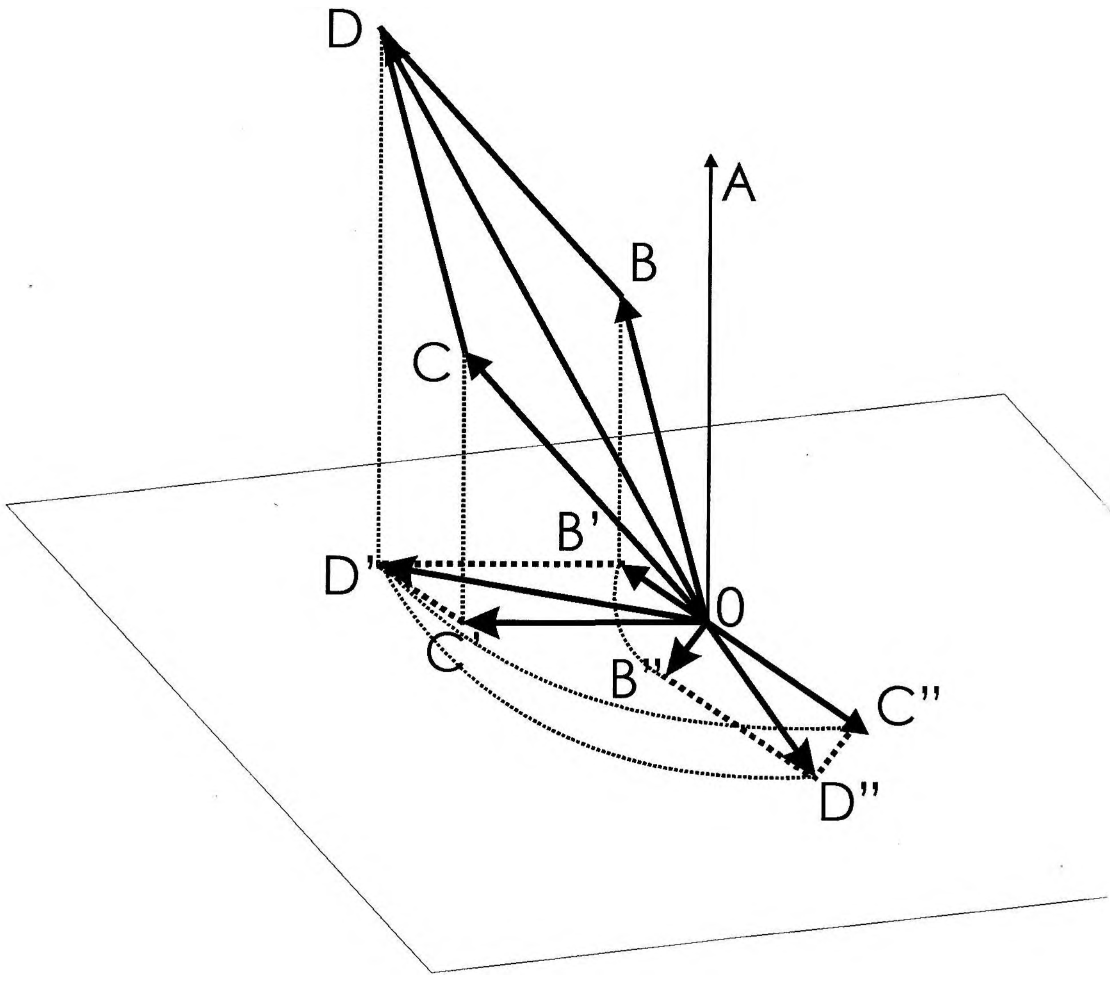


Figure 12.4:

Dokaz Ako su bar dva vektora od vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ međusobno kolinearna, tada je tvrđenje direktna posledica definicija vektora, sabiranja vektora, vektorskog proizvoda i teoreme 12.46. Ako nikoja dva vektora, od vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ nisu kolinearni, tada se odaberu takve tačke O, A, B, C, D iz prostora

$\mathbb{E}$ da je

1) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ i $\overrightarrow{OD}=\vec{b}+\vec{c}$,

odnosno da je $OCDB$ paralelogram.
Zatim se konstruiše ravan α kojoj pripada tačka O i koja je normalna na pravac vektora $\vec{a}$. Normalne projekcije tačaka B, C i D na ravan α označiće se redom sa B', C' i D'. Jasno je da je

2) $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OX'}$ za svako $X\in\{B,C,D\}$,

jer su pravci i smerovi ta dva vektora očevidno isti, a intenziteti su jednaki jer su površine paralelograma nad vektorima $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OX}$ i $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OX'}$ iste zbog jednakosti njihovih osnovica $|\overrightarrow{OA}|$ i odgovarajućih visina $|\overrightarrow{OX'}|$. Takođe je

3) $\overrightarrow{OD'}=\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}$

na osnovu 1), 12.29, 12.23 i 12.30 (projekcija zbira jednaka je zbiru projekcija).

Pretpostavimo sada da je

4) $\overrightarrow{OX''}=\frac{1}{|\overrightarrow{OA}|}\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OX'}$ za svako $X\in\{B,C,D\}$.

Očevidno je da su tačke C'', D'', B'' dobijene rotacijom tačaka C', D', B' oko tačke O za 90^0, pa je paralelogram $OC'D'B'$ podudaran sa paralelogramom $OC''D''B''$. Zato iz $\overrightarrow{OD'}=\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}$ sledi
$\overrightarrow{OD''}=\overrightarrow{OB''}+\overrightarrow{OC''}$, a odavde zbog 4) sledi

$$\frac{1}{|\overrightarrow{OA}|}\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OD'}=\frac{1}{|\overrightarrow{OA}|}\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB'}+\frac{1}{|\overrightarrow{OA}|}\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC'},$$

što množenjem sa $|\overrightarrow{OA}|$ daje

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OD'}=\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC'}$$

odakle zbog 2) daje

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}$$

i na kraju, zbog 1) sledi

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}.$$

Teorema 12.48 *Neka je $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ triedar jediničnih vektora desne orijentacije (desni triedar), gde je $\vec{i}\perp\vec{j}$, $\vec{i}\perp\vec{k}$, $\vec{j}\perp\vec{k}$, odnosno triedar $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ je ortonormiran* (16.8). *Tada za proizvoljne vektore $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ i $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ (pogledati* 12.18 *b) važi:*

$$
\begin{aligned}
&a)\quad \vec{a}\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,\\
&b)\quad \vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}=\\
&\qquad =\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\vec{k}\overset{def}{=}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}\\
&c)\quad |\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\vec{a}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2},\\
&d)\quad \sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=\arccos\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|},\\
&e)\quad \vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\vec{b}=0 \qquad\qquad (\Leftrightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\ ?)
\end{aligned}
$$

Dokaz

a) Kako su $\vec{i}\vec{i}=\vec{j}\vec{j}=\vec{k}\vec{k}=1$, $\vec{i}\vec{j}=\vec{i}\vec{k}=\vec{j}\vec{k}=0$ i važi distributivnost skalarnog proizvoda u odnosu na sabiranje vektora (teorema 12.32), to sledi tvrđenje.

b) Kako je na osnovu definicije vektorskog proizvoda i definicije triedra $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	0	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	0	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	0

i kako važi distributivnost vektorskog proizvoda u odnosu na sabiranje vektora, tj. teorema 12.47, to sledi tačnost tvrđenja.

c) Na osnovu definicije 12.19 skalarnog proizvoda vektora sledi

$$|\vec{a}|^2=\vec{a}\vec{a}\Leftrightarrow|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\vec{a}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}=\sqrt{a^\top a}=\sqrt{a^*a}.$$

Videti 16.5 i 16.3.

d) Sledi iz definicije skalarnog proizvoda.

Teorema 12.49 *Ako je* $f(\vec{a}) = (\vec{i}\vec{a}, \vec{j}\vec{a}, \vec{k}\vec{a})$, *tada je* $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *bijektivna funkcija.*

Dokaz Kako je $\mathbf{pr}_{\vec{a}}$ funkcija 12.20, to je i f funkcija. Injektivnost sledi iz

$$f(\vec{a}) = f(\vec{b}) \Rightarrow (\vec{i}\vec{a}, \vec{j}\vec{a}, \vec{k}\vec{a}) = (\vec{i}\vec{b}, \vec{j}\vec{b}, \vec{k}\vec{b}) \Rightarrow \vec{i}(\vec{a} - \vec{b}) = 0 \wedge \vec{j}(\vec{a} - \vec{b}) = 0 \wedge \vec{k}(\vec{a} - \vec{b}) = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{b}$$

jer vektor $\vec{a} - \vec{b} \neq 0$ ne može biti normalan na svakom od vektora $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, pa je $\vec{a} - \vec{b} = 0$. Sirjektivnost funkcije f je očevidna, jer za svaku uređenu trojku realnih brojeva (a_1, a_2, a_3), postoji vektor $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ za koji važi $f(\vec{a}) = (a_1, a_2, a_3)$, što se jednostavno proverava jer je očevidno $\vec{i}\vec{a} = a_1$, $\vec{j}\vec{a} = a_2$ i $\vec{k}\vec{a} = a_3$.

Koristiće se kraća oznaka $f(\vec{a}) = (a_1, a_2, a_3) = \mathbf{a}$. U stvari, funkciju f bi trebalo označavati sa $f_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}$, međutim, zbog kratkoće zapisa, to se neće činiti.

Ista funkcija f mogla se definisati i pomoću teoreme 12.18, gde se za vektore $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ uzmu vektori $\vec{i}, \vec{j}$ i $\vec{k}$, a za α, β i γ redom $\vec{i}\vec{a} = a_1$, $\vec{j}\vec{a} =_2$ i $\vec{k}\vec{a} = a_3$. Funkcija f, znači, preslikava slobodne vektore u uređene trojke čije su komponente realni brojevi.

Teorema 12.50 *Neka je* $\circ : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *binarna operacija definisana sa* $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = (a_1, a_2, a_3) \circ (b_1, b_2, b_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ *za sve* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$. *Tada je*

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \vec{a}\vec{b}.$$

Dokaz $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} \overset{12.49.}{=} (a_1, a_2, a_3) \circ (b_1, b_2, b_3) \overset{def}{=} a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \overset{12.48.}{=} \vec{a}\vec{b}.$

Teorema 12.51 *Algebarska struktura* $(V, +, \times)$ *izomorfna je algebarskoj strukturi* $(\mathbb{R}^3, +, *)$ (*videti* 6.19), *gde je* $(a_1, a_2, a_3) * (b_1, b_2, b_3) = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$.

Dokaz Izomorfizam je bijekcija f iz teoreme 12.49. Prvo se dobija

$$f(\vec{a} + \vec{b}) \overset{12.18.}{=} f(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} + b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) \overset{12.6,12.11.}{=}$$

$$\overset{12.6,12.11.}{=} f((a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j} + (a_3 + b_3)\vec{k}) \overset{12.49.}{=} (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \overset{6.19.}{=}$$

$$\overset{6.19.}{=} (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) \overset{12.49.}{=} f(\vec{a}) + f(\vec{b}).$$

Takođe je i

$$f(\vec{a} \times \vec{b}) \overset{12.18.}{=} f((a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \times (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k})) \overset{12.48.}{=}$$

$$f((a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}) \overset{12.49.}{=}$$

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \overset{6.19.}{=} (a_1, a_2, a_3) * (b_1, b_2, b_3) \overset{12.49.}{=}$$

$$f(\vec{a}) * f(\vec{b}).$$

Ako se primeni f^{-1} na jednakost $f(\vec{a} \times \vec{b}) = f(\vec{a}) * f(\vec{b})$ i stavi $\vec{a} = f^{-1}(\mathbf{a})$, $\vec{b} = f^{-1}(\mathbf{b})$, dobija se

$$f^{-1}(\mathbf{a}) \times f^{-1}(\mathbf{b}) = f^{-1}(\mathbf{a} * \mathbf{b}).$$

Teorema 12.52 *Ako je* f *funkcija iz teoreme* 12.49 *i operacija* $\cdot$ *iz zadatka 6.19, tada za svaki realan broj* α *i svaki vektor* $\vec{a}$ *važi* $f(\alpha\vec{a}) = \alpha \cdot f(\vec{a})$ *odnosno* $f^{-1}(\alpha \cdot \mathbf{a}) = \alpha f^{-1}(\mathbf{a})$.

Dokaz
$$f(\alpha\vec{a}) \overset{12.49.}{=} (\vec{i}(\alpha\vec{a}), \vec{j}(\alpha\vec{a}), \vec{k}(\alpha\vec{a})) \overset{12.29.}{=} (\alpha(\vec{i}\vec{a}), \alpha(\vec{j}\vec{a}), \alpha(\vec{k}\vec{a}))$$
$$\overset{6.19.}{=} \alpha(\vec{i}\vec{a}, \vec{j}\vec{a}, \vec{k}\vec{a}) \overset{12.49.}{=} \alpha \cdot f(\vec{a}).$$

Ako se primeni f^{-1} na jednakost $f(\alpha\vec{a}) = \alpha \cdot f(\vec{a})$ i stavi $\vec{a} = f^{-1}(\mathbf{a})$, dobija se $f^{-1}(\alpha \cdot \mathbf{a}) = \alpha f^{-1}(\mathbf{a})$.

Teorema 12.53 *(Teorema o dvostrukom vektorskom proizvodu) Za sve vektore $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ važi*

a) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\vec{c})\vec{a}$, *b)* $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\vec{b})\vec{c}$.

Dokaz
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \overset{12.49}{=} (f^{-1}(\mathbf{a}) \times f^{-1}(\mathbf{b})) \times f^{-1}(\mathbf{c}) \overset{12.51}{=}$$
$$f^{-1}(\mathbf{a} * \mathbf{b}) \times f^{-1}(\mathbf{c}) \overset{12.51}{=} f^{-1}((\mathbf{a} * \mathbf{b}) * \mathbf{c}) \overset{6.19}{=}$$
$$f^{-1}((\mathbf{a} \circ \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{b} \circ \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}) \overset{12.51}{=} f^{-1}((\mathbf{a} \circ \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b}) - f^{-1}((\mathbf{b} \circ \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}) \overset{12.52}{=}$$
$$\overset{12.52}{=} (\mathbf{a} \circ \mathbf{c}) f^{-1}(\mathbf{b}) - (\mathbf{b} \circ \mathbf{c}) f^{-1}(\mathbf{a}) \overset{12.52, 12.50}{=} (\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\vec{c})\vec{a}.$$

Analogno se dokazuje i u slučaju pod b).

Definicija 12.54 *Mešoviti proizvod vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ jeste $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$.*

Teorema 12.55 *Mešoviti proizvod nekomplanarnih vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ je po apsolutnoj vrednosti jednak zapremini paralelopipeda koji je određen tim vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ i jednak determinanti matrice čije su kolone redom koordinate vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$.*

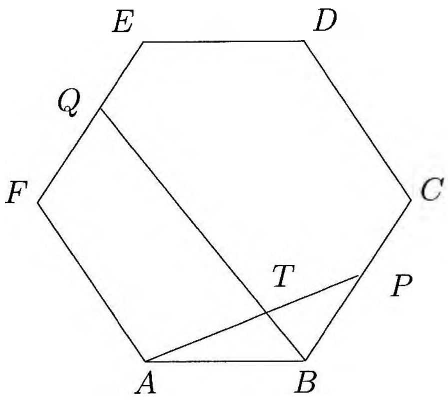
Dokaz $|\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})| = |\vec{b} \times \vec{c}| \cdot |\mathbf{pr}_{\vec{b}\times\vec{c}}(\vec{a})| = \mathcal{B} \cdot h = \mathcal{V}$, gde je $\mathcal{B}$ baza, h visina i $\mathcal{V}$ zapremina paralelopipeda $OMNPO'M'N'P'$, pri čemu je $\overrightarrow{OM} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OP} = \vec{c}$ i $\overrightarrow{OO'} = \vec{a}$, jer je $|\vec{b} \times \vec{c}| = bc \sin \measuredangle(\vec{b}, \vec{c})$ površina paralelograma, a $|\mathbf{pr}_{\vec{b}\times\vec{c}}(\vec{a})|$ je visina paralelopipeda zbog normalnosti vektora $(\vec{b} \times \vec{c})$ na bazu paralelopipeda.

Teorema 12.56 *Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni su akko je njihov mešoviti proizvod jednak nuli.*

Dokaz($\Rightarrow$) Ako su $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni i ako je bar jedan od njih nula vektor ili $\vec{b} \| \vec{c}$, mešoviti proizvod će očevidno biti nula. Neka su sada $\vec{a} \neq 0$, $\vec{b} \neq 0$, $\vec{c} \neq 0$ i $\vec{b} \nparallel \vec{c}$. Tada je $0 \neq (\vec{b} \times \vec{c}) \perp \vec{a}$, i na osnovu teoreme 12.32(c) $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = 0$.
($\Leftarrow$) Ako je mešovit proizvod $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$ jednak nuli, tada je $\vec{a} = 0$ ili $\vec{b} \times \vec{c} = 0$ ili $\vec{a} \perp (\vec{b} \times \vec{c})$. U svakom od ovih slučajeva ili je bar jedan od vektora jednak nuli, što znači da su komplanarni (definicija 12.15), ili su vektori $\vec{b}$ i $\vec{c}$ kolinearni ili su sva tri vektora $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ normalna na vektor $\vec{b} \times \vec{c}$, pa su zbog toga komplanarni.

Drugi način dokazivanja ove teoreme je primena prethodne teoreme.

Zadatak 12.57 *Neka su $ABCDEF$ pravilni šestougao, P i Q sredine redom stranica BC i EF i tačka T presek duži AP i BQ. U kom odnosu tačka T deli duži AP i BQ?*



Rešenje Ovakvi zadaci rešavaju se tačno utvrđenim postupkom koji će biti izložen kroz ovaj primer. Uočiti bilo koji poligon čijoj konturi pripada bar jedna od duži koje učestvuju u traženom odnosu, na primer ABT. U sledećem koraku, napisati zbir vektora po konturi tog poligona i izjednačiti ga s nulom, tj. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{TA} = 0$. Uočiti neka dva nekolinearna vektora, na primer $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ i $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ i sve vektore sa konture izraziti pomoću vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (12.16). Jasno je da je zbog teoreme 12.14 $\overrightarrow{TA} = \alpha\ \overrightarrow{PA}$ i $\overrightarrow{BT} = \beta\ \overrightarrow{BQ}$ za neke skalare α i β. Sada sledi da su $\overrightarrow{TA} = \alpha\ \overrightarrow{PA} = \alpha(-\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a})$ i $\overrightarrow{BT} = \beta\ \overrightarrow{BQ} = \beta(-2\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b})$ što unošenjem u $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{TA} = 0$ daje

$$(1 - 2\beta - \alpha)\vec{a} + (\frac{3}{2}\beta - \frac{1}{2}\alpha)\vec{b} = 0.$$

Odavde, na osnovu teoreme 12.16, sledi da su $1 - 2\beta - \alpha = 0$ i $\frac{3}{2}\beta - \frac{1}{2}\alpha = 0$, tj. $\alpha = \frac{3}{5}$ i $\beta = \frac{1}{5}$, pa su $BT : TQ = 1 : 4$ i $AT : TP = 3 : 2$.

Zadatak 12.58 *Neka su A, B, C i D četiri proizvoljne tačke.*

a) Ako je $\overrightarrow{OM} = \vec{r}_M$ i $\overrightarrow{ON} = \vec{r}_N$, izraziti $\overrightarrow{MN}$ i $\overrightarrow{NM}$ u zavisnosti od $\vec{r}_M$ i $\vec{r}_N$, koji se nazivaju vektori položaja tačaka M i N.

b) Dokazati da je: $2\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}\,\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}\,\overrightarrow{DC}$.

c) *Izračunati ugao između dijagonala AC i BD četvorougla $ABCD$ ako su $AB = 11$, $BC = 13$, $CD = 8$ i $DA = 4$.*

Zadatak 12.59 *Rešiti jednačinu $\vec{x} + \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$ u skupu vektora.*

Rešenje Ako se data jednačina skalarno pomnoži vektorom $\vec{a}$, dobija se $\vec{a}\vec{x} = \vec{a}\vec{b}$. Množenjem vektorski date jednačine vektorom $\vec{a}$ dobija se $\vec{a} \times \vec{x} + \vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{x}) = \vec{a} \times \vec{b}$. Izražavanjem vektora $\vec{a} \times \vec{x}$ iz date jednačine i unošenjem u prethodnu jednakost, dobija se $\vec{b} - \vec{x} + \vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{x}) = \vec{a} \times \vec{b}$. Korišćenjem teoreme 12.53 i zamenom $\vec{a}\vec{x}$ sa $\vec{a}\vec{b}$ iz prethodne jednakosti dobija se da je $\vec{b} - \vec{x} + (\vec{a}\vec{b})\vec{a} - a^2\vec{x} = \vec{a} \times \vec{b}$, odakle je $\vec{x} = \frac{1}{1+a^2}\big((\vec{a}\vec{b})\vec{a} + \vec{b} - \vec{a} \times \vec{b}\big)$.

Zadatak 12.60 *Naći skalarni proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, ako su vektori $\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$ i $\vec{b} = \vec{p} + 4\vec{q}$, gde su $\vec{p}$ i $\vec{q}$ normalni i jedinični vektori.*

Zadatak 12.61 *Koliki je zbir $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ ako su $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ tri orta koji zadovoljavaju uslov $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$.*

Zadatak 12.62 *Naći intenzitet vektora $\vec{p} = 4\vec{a} - \vec{b} + 8\vec{c}$, ako je $\vec{a} \perp \vec{b} \perp \vec{c} \perp \vec{a}$ i njihovi intenziteti 2.*

Zadatak 12.63 *Naći dužinu kraće dijagonale paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$ i $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, ako su $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$ i $\sphericalangle(\vec{p}, \vec{q}) = \alpha/4$.*

Zadatak 12.64 *Naći ugao između vektora $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ i $\vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}$, ako su $\vec{p}$ i $\vec{q}$ uzajamno normalni jedinični vektori.*

Zadatak 12.65 *Ako su $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 2\pi/3$, odrediti za koju će vrednost koeficijenta α vektori $\vec{p} = \alpha\vec{a} + 17\vec{b}$ i $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ biti uzajamno normalni.*

Zadatak 12.66 *Koji ugao obrazuju jedinični vektori $\vec{s}$ i $\vec{t}$, ako su vektori $\vec{p} = \vec{s} + 2\vec{t}$ i $\vec{q} = 5\vec{s} - 4\vec{t}$ uzajamno normalni.*

Zadatak 12.67 *Za koju vrednost koeficijenta α će vektori $\vec{p} = \alpha\vec{a} + 5\vec{b}$ i $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ biti kolinearni, ako vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni?*

Zadatak 12.68 *Izračunati površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ i $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n}$, za: $m = 5$, $n = 3$ i $\sphericalangle(\vec{m}, \vec{n}) = \pi/6$.*

Zadatak 12.69 *Izračunati sinus ugla između dijagonala paralelograma konstruisanog nad vektorima* $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n} - \vec{p}$ *i* $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n} + \vec{p}$, *gde su* $\vec{m}$, $\vec{n}$ *i* $\vec{p}$ *uzajamno normalni ortovi (jedinični vektori).*

Zadatak 12.70 *Izračunati zapreminu paralelopipeda konstruisanog nad vektorima* $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$, $\vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q} - 3\vec{r}$ *i* $\vec{c} = \vec{p} + 2\vec{q} + \vec{r}$, *gde su* $\vec{p}$, $\vec{q}$ *i* $\vec{r}$ *uzajamno normalni ortovi (jedinični vektori).*

Zadatak 12.71 *Dati su vektori* $\vec{a} = 2\vec{m} - 3\vec{n} + 4\vec{p}$; $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n} - \vec{p}$ *i* $\vec{c} = 4\vec{m} - 5\vec{n} + 2\vec{p}$. *Razložiti vektor* $\vec{c}$ *u pravcu vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$.

Zadatak 12.72 *Dokazati da su vektori* $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ *i* $\vec{c} = 6\vec{i} + 11\vec{j} - 7\vec{k}$ *komplanarni i razložiti vektor* $\vec{c}$ *u pravcu vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$, *odnosno napisati u obliku* $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, *gde su* α *i* β *neki realni brojevi.*

Zadatak 12.73 *Izračunati površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima* $\vec{p} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ *i* $\vec{q} = \vec{a} - 4\vec{b}$, *gde su* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *normalni i jedinični.*

Zadatak 12.74 *Izračunati* $|\vec{q}|$ *za* $\vec{q} = (3\vec{m} + 4\vec{n} + 5\vec{p}) \times (\vec{m} + 6\vec{n} + 4\vec{p})$, *gde su* $\vec{m}$, $\vec{n}$ *i* $\vec{p}$ *uzajamno normalni ortovi (jedinični vektori).*

Zadatak 12.75 *Dokazati da je mešovit proizvod tri vektora, od kojih su dva kolinearna, jednak nuli.*

Zadatak 12.76 *Naći zapreminu trostrane piramide čija su temena u tačkama* $A(2,-1,1)$; $B(5,5,4)$; $C(3,2,-1)$; $D(4,1,3)$.

Zadatak 12.77 *Naći visinu* CD *trougla, ako znamo njegove strane* $\overrightarrow{AB} = 3\vec{p} - 4\vec{q}$ *i* $\overrightarrow{BC} = \vec{p} + 5\vec{q}$, *pri čemu su* $\vec{p}$ *i* $\vec{q}$ *jedinični i normalni.*

Zadatak 12.78 $(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a}\vec{b})(\vec{a}\vec{b}) = (\vec{a}\vec{a})(\vec{b}\vec{b})$

Uputstvo: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Poglavlje 13

ANALITIČKA GEOMETRIJA

Ako se u geometrijskom (euklidskom) trodimenzionalnom prostoru, pored fiksiranog jediničnog triedra vektora $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, gde su svaka dva vektora međusobno normalna, fiksira i jedna tačka O, dobija se Dekartov pravougli koordinatni sistem, gde su ose x, y i z određene redom vektorima $\vec{i}, \vec{j}$ i $\vec{k}$ i tačkom O. Drugim rečima, dobijena je bijektivna funkcija koja svakoj tački prostora pridružuje uređenu trojku realnih brojeva. Činjenicu da tački A odgovara uređena trojka realnih brojeva (x, y, z) označiće se sa $A(x, y, z)$.

Jasno je da svakom vektoru jednoznačno odgovara tačka A takva da je vektor $\overrightarrow{OA}$ baš taj vektor i njega ćemo označavati sa $\vec{r}_A$ i zvati ga vektor položaja tačke A, gde je O koordinatni početak. Videće se da je to izomorfizam prostora uređenih trojki realnih brojeva i prostora slobodnih vektora!

Definicija 13.1 *Vektor* $\vec{r}_A = \overrightarrow{OA}$ *naziva se vektor položaja tačke* A, *gde je* O *koordinatni početak,* $\boxed{\vec{r}_A = \overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}$ *a* (x, y, z) *koordinate tačke* $A(x, y, z)$.

Za tačku $A(x, y, z)$, je $\vec{r}_A = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{a}$ i zbog kratkoće pisanja uobičajeno je da se $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ zapisuje samo sa $a = (x, y, z)$, ili preciznije, kraći zapis je u stvari izomorfizam f $\big($videti 12.49, 12.51 i 12.52$\big)$ prostora slobodnih vektora u odnosu na sabiranje vektora i množenja skalarom $(V, +, \cdot)$ i prostora $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ uređenih trojki realnih brojeva u odnosu na sabiranje i množenja skalarom, gde je sabiranje trojki definisano kao

$$\boxed{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3)}$$

a množenje brojem λ definisano sa $\boxed{\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3)}$.

Ako postoji tačka $A(x, y, z)$, tada je $f(\vec{r}_A) = (x, y, z)$, ali zbog kratkoće (**izomorfizma**), kao što je već dogovoreno, izostavlja se f i piše samo $\vec{r}_A = (x, y, z)$, ali f se podrazumeva.

Sada će se videti kako se elementarne činjenice iz analitičke geometrije jednostavno izvode pomoću vektora.

Neka su $A(x_1, y_1, z_1)$ i $B(x_2, y_2, z_2)$ tačke iz prostora.Tada je

Činjenica 13.2

$$\boxed{AB = |\overrightarrow{AB}| = |\vec{r}_B - \vec{r}_A| = \sqrt{(\vec{r}_B - \vec{r}_A)(\vec{r}_B - \vec{r}_A)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

Lema 13.3

Deoba duži u datoj razmeri

Ako tačka M deli duž AB u razmeri $\lambda : 1$, tj. $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$, tada

$$\vec{r}_M = \frac{\vec{r}_A + \lambda\vec{r}_B}{1 + \lambda}.$$

Dokaz $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = \lambda(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\vec{r}_A + \vec{r}_M = -\lambda\vec{r}_M + \lambda\vec{r}_B \Leftrightarrow (1 + \lambda)\vec{r}_M = \vec{r}_A + \lambda\vec{r}_B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{r}_M = \frac{\vec{r}_A + \lambda\vec{r}_B}{1+\lambda}}$$

Faktički, to je jednačina prave $p = p(A, B)$ bez tačke B, odnosno $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \Leftrightarrow M \in p \setminus \{B\}$.

Lema 13.4
Jednačina prave p

> Oznaka $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \vec{r}_M$, podrazumevaće da je $\vec{r} = \vec{r}_M$ onaj predstavnik vektora čija je početna tačka koordinatni početak $O = O(0,0,0)$.

Neka je $\overrightarrow{OM} = \vec{r}_M = \vec{r} = (x,y,z)$ vektorska promenljiva. Tada je

$$A(x_A, y_A, z_A) \in p \parallel \vec{p} = (p_1, p_2, p_3) \;\Leftrightarrow$$

$$\boxed{p : \vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{p}} \;\Leftrightarrow\; \boxed{p : \frac{x-x_A}{p_1} = \frac{y-y_A}{p_2} = \frac{z-z_A}{p_3} = t} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{p : x = x_A + tp_1 \;\wedge\; y = y_A + tp_2 \;\wedge\; z = z_A + tp_3}$$

Ako pravoj p pripada (data fiksna) tačka $A(x_A, y_A, z_A)$ i ako je $p \| \vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ (gde je $\vec{p}$ dati fiksni vektor), tada vektor položaja $\vec{r} = \vec{r}_M = (x,y,z)$ proizvoljne tačke $M = M(x,y,z)$ te prave p,
po Prvom zakonu analitičke geometrije, očevidno zadovoljava

$$\vec{r}_M = \vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{p}$$

gde je t proizvoljni realni broj, jer je

$$M \in p \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \| \vec{p} \Leftrightarrow \vec{r}_M - \vec{r}_A \| \vec{p} \Leftrightarrow \vec{r} - \vec{r}_A = t\vec{p}.$$

Očevidno je da važi i obratno: ako vektor $\vec{r} = (x,y,z)$ zadovoljava jednačinu $\vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{p}$, tada tačka čije su koordinate (x,y,z) pripada pravoj koja prolazi kroz tačku $A(x_A, y_A, z_A)$ i paralelna je sa vektorom $\vec{p}$ za neki realni broj t. Znači, jednačina prave u vektorskom obliku je $\vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{p}$, što je ekvivalentno sistemu $x = x_A + tp_1 \wedge y = y_A + tp_2 \wedge z = z_A + tp_3$ koji se naziva parametarske jednačine prave i često ga zapisujemo i kao $\boxed{\frac{x-x_A}{p_1} = \frac{y-y_A}{p_2} = \frac{z-z_A}{p_3} = t}$ odnosno **kanonički oblik jednačine prave.**

~~Neka su $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b}$ dati nenula međusobno normalni vektori, neka je $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ promenljivi vektor i α ravan koja prolazi kroz koordinatni početak, a normalna na vektor $\vec{b}$. Tada vektorska jednačina~~

$$\cancel{\vec{a} \times \vec{r} = \vec{b}}$$

~~jeste jednačina prave p koja pripada ravni α, paralelna je sa OA, udaljena od OA za $\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ (visina paralelograma čija je osnovica OA, a površina $|\vec{b}|$) i ako je P proizvoljna tačka prave p, tada je $(\vec{a}, \overrightarrow{OP}, \vec{b})$ triedar desne orijentacije.~~

> Bar jedan od vektora iz skupa $\{(1,\lambda,\delta), (0,1,\delta), (0,0,1)\}$ jeste vektor proizvoljne prave, za neke realne brojeve λ i δ.

Time je pokazano da vektor prave u jednačini prave zavisi **samo od**

DVA parametra! Ovo je tačno jer ako je $\vec{p}$ vektor prave, tada i vektor koji se dobije od vektora $\vec{p}$ menjanjem smera i intenziteta (množenjem brojem različitim od nule), takođe je vektor iste te prave.

Lema 13.5

Jednačina ravni α

Oznaka $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \vec{r}_M$, podrazumevaće da je $\vec{r} = \vec{r}_M$ onaj predstavnik vektora čija je početna tačka koordinatni početak $O = O(0,0,0)$.

Neka je $\vec{r}_M = \vec{r} = (x, y, z)$ vektorska promenljiva. Tada je

$$Q(x_Q, y_Q, z_Q) \in \alpha \perp \vec{n} = (A, B, C) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\alpha : \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q} \Leftrightarrow \boxed{\alpha : \ Ax + By + Cz + D = 0,}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\alpha : A(x - x_Q) + B(y - y_Q) + C(z - z_Q) = 0}$$

gde su $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k} = (A, B, C)$ vektor normalan na ravan α, Q proizvoljna fiksna tačka ravni α, $\vec{r}$ promenljivi (tekući) vektor čiji vrh uvek pripada ravni α ako je njegov početak u tački $O(0,0,0)$, A, B, C, D su realni brojevi za koje važi da je $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0 \Leftrightarrow (A, B, C) \neq (0,0,0) \Leftrightarrow A \neq 0 \vee B \neq 0 \vee C \neq 0$, odnosno bar jedan od A, B, C različit je od nule i $D = -\vec{n}\vec{r}_Q$.

Dokaz Jasno je da bar jedan od brojeva A, B i C mora biti različit od nule, u protivnom to bi bila jednačina praznog skupa za $D \neq 0$ ili jednačina celoga prostora za $D = 0$. Neka je dati vektor normale $\vec{n} = (A, B, C) = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ i tekući (promenljivi) vektor $\vec{r}_M = \vec{r} =$
$= (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Tada sledi da $Ax + By + Cz + D = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \vec{n}\vec{r} = -D \Leftrightarrow \frac{\vec{n}\vec{r}}{|\vec{n}|} = \frac{-D}{|\vec{n}|} \Leftrightarrow \pm|\mathbf{pr}_{\vec{n}}\vec{r}| = \frac{-D}{|\vec{n}|} \Leftrightarrow M(x, y, z) \in \alpha$, gde je α ravan normalna na vektor $\vec{n}$ i udaljena od koordinatnog početka za $|\frac{-D}{|\vec{n}|}|$ u smeru vektora $\vec{n}$ za $D < 0$, a u smeru vektora $-\vec{n}$ za $D > 0$. □

Na primer, ako je α takva ravan da je $Q(1, -3, 4) \in \alpha \perp \vec{n} = (2, 1, -5)$, tada za $M(x, y, z)$ čiji je vektor položaja je $\vec{r}_M = \vec{r} = (x, y, z)$ važi:

$$\boxed{M \in \alpha \Leftrightarrow \mathbf{pr}_{\vec{n}}\vec{r}_M = \mathbf{pr}_{\vec{n}}\vec{r}_Q \Leftrightarrow \frac{\vec{n}\vec{r}}{|\vec{n}|}\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{n}\vec{r}_Q}{|\vec{n}|}\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \Leftrightarrow \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q}$$

odakle sledi da je $(2, 1, -5)(x, y, z) = (2, 1, -5)(1, -3, 4)$
odnosno $2x + y - 5z = 2 - 3 - 20 \Leftrightarrow 2x + y - 5z + 21 = 0$.
Primetiti da se jednačina ravni α može izvesti i iz činjenice $\overrightarrow{QM} \perp \vec{n}$, jer za proizvoljnu tačku $M(x, y, z)$, to jest $\vec{r}_M = \vec{r} = (x, y, z)$ važi:

$$\boxed{M \in \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{QM} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{QM}\vec{n} = 0 \Leftrightarrow (\vec{r}_M - \vec{r}_Q)\vec{n} = 0 \Leftrightarrow \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q}$$ X

Bar jedan od vektora iz skupa $\{(1,\lambda,\delta),(0,1,\delta),(0,0,1)\}$ jeste vektor normale proizvoljne ravni, za neke realne brojeve λ i δ.

Ovim je pokazano da vektor normale ravni u jednačini zavisi **samo od DVA parametra!** Ovo je tačno jer ako je $\vec{n}$ vektor ravni, tada i vektor koji se dobije od vektora $\vec{n}$ menjanjem smera i intenziteta (množenjem brojem različitim od nule), takođe je vektor iste te ravni.

Osnovna pravila za rešavanje zadataka iz analitičke geometrije

1 Jedinični vektor bilo kog pravca (ili prave p) dobija se kada **bilo koji** nenula vektor $\vec{p}$ paralelan s pravom (pravcem) p podelimo njegovim sopstvenim intenzitetom, tj. jedinični vektor je $\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$.
$\forall$ PRAVAC IMA 2 ORTA

2 **Bilo koji** vektor jednak je proizvodu njegovog intenziteta i jednog od jediničnih vektora kolinearnih (paralelnih) s njim.

3 U većini zadataka, potreban vektor u rešavanju dobija se kao vektorski proizvod neka dva data nekolinearna vektora koji su oba normalni na traženi vektor.

4 Dati su vektori $\vec{r}_A, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ i realni brojevi $|\overrightarrow{AB}| = d_1$, $|\overrightarrow{BC}| = d_2$ i $|\overrightarrow{CD}| = d_3$ tako da je $\vec{a} \parallel AB$, $\vec{b} \parallel BC$ i $\vec{c} \parallel CD$. Tada vektor $\vec{r}_D$, izražen u zavisnosti od datih vektora i skalara (brojeva), jeste

$$\vec{r}_D = \vec{r}_A \pm d_1\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \pm d_2\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \pm d_3\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|},$$

gde se ispred sabiraka uzima znak $+$ ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ istog smera s redom vektorima $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$, u suprotnom znak $-$.

Lema 13.6

Parametarske jednačine ravni

Neka su $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ nekolinearni vektori paralelni sa ravni π i $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ tačka koja pripada ravni π. Tada će proizvoljna tačka $M(x, y, z)$ pripadati ravni π akko su vektori $\overrightarrow{QM}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ komplanarni, tj. $\overrightarrow{QM} = t_1\vec{a} + t_2\vec{b}$ za neke realne brojeve t_1 i t_2, a ako je $\vec{r} = \vec{r}_M = (x, y, z)$, tada je $\boxed{\vec{r} = \vec{r}_Q + t_1\vec{a} + t_2\vec{b}}$ vektorska parametarska jednačina ravni, ekvivalentna sistemu parametarskih jednačina

$$\boxed{x = x_Q + t_1a_1 + t_2b_1, \quad y = y_Q + t_1a_2 + t_2b_2, \quad z = z_Q + t_1a_3 + t_2b_3}$$

gde su t_1 i t_2 parametri (proizvoljni realni brojevi).

Može se koristiti i teorema 12.56 da su vektori $\overrightarrow{QM}$, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ komplanarni akko $\overrightarrow{QM}(\vec{a} \times \vec{b}) = 0$, odnosno $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{r} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{r}_Q$.

Primer Naći jednačinu skupa svih tačaka koje su sredine neke duži, čija je jedna krajnja tačka na pravoj $a: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{3} = t_1$ i druga krajnja tačka na pravoj $b: \frac{x}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{-1} = t_2$.

Rešenje Proizvoljna tačka prave a je $P(2t_1 + 1, t_1 - 2, 3t_1 + 1)$ a prave b je $Q(3t_2, 2t_2 + 3, -t_2 - 1)$. Ako su x, y i z koordinate sredine duži PQ, tada je

$$x = \frac{x_P + x_Q}{2} = \frac{2t_1 + 3t_2 + 1}{2}$$

$$y = \frac{y_P + y_Q}{2} = \frac{t_1 + 2t_2 + 1}{2}$$

$$z = \frac{z_P + z_Q}{2} = \frac{3t_1 - t_2}{2}$$

što su zapravo parametarske jednačine ravni. Eliminacijom parametara t_1 i t_2 iz ovih jednačina dobija se opšti oblik jednačine te ravni $\boxed{\alpha: 7x - 11y - z + 2 = 0}$, pri čemu su $\alpha \parallel a, \alpha \parallel b$ i $\mathbf{d}(\alpha, a) = \mathbf{d}(\alpha, b)$.

Lema 13.7

Normalni oblik jednačine ravni

Ako se jednačina ravni $Ax + By + Cz + D = 0$ podeli intenzitetom vektora $A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$, to jest sa $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ (neka je $D < 0$, što ne utiče na opštost), dobija se

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p > 0, \quad \text{gde su}$$

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad \text{i} \quad p = \frac{-D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} > 0$$

i gde su α, β i γ uglovi koje vektor normale $\vec{n}$ ravni obrazuje sa jediničnim vektorima $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$, a p je rastojanje ravni od koordinatnog početka. Ovaj oblik jednačine ravni naziva se normalni oblik jednačine ravni.

Lema 13.8

Segmentni oblik jednačine ravni

Ako je $A \cdot B \cdot C \cdot D \neq 0$, tada je

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{\frac{-D}{A}} + \frac{y}{\frac{-D}{B}} + \frac{z}{\frac{-D}{C}} = 1.$$

Ovaj oblik naziva se segmentni oblik jednačine ravni. Brojevi u imeniocima ove jednačine predstavljaju redom odsečke te ravni na osama x, y i z.

Lema 13.9

Jednačina ravni paralelna sa dva data nekolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i prolazi kroz tačku Q

Jednačina ravni α najčešće se izvodi tako što se odrede dva nekolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, koji su paralelni sa ravni α, i bar jedna tačka $Q(x_1, y_1, z_1)$ koja pripada ravni α jer je tada jednačina ravni

$$(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{r} - \vec{r}_Q) = 0 \Leftrightarrow A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0,$$

gde je $\vec{a} \times \vec{b} = (A, B, C) = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$. Ovaj oblik jednačine ravni poznat je kao jednačina ravni kroz jednu tačku.

Ako postoje bar jedan vektor $\vec{n} = (A, B, C) = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ koji je normalan na ravan α i bar jedna tačka $Q(x_1, y_1, z_1)$ koja pripada ravni α i ako je $\vec{r} = (x, y, z)$, tada jednačina ravni α glasi:

$$\boxed{\vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q \Leftrightarrow \vec{n}(\vec{r} - \vec{r}_Q) = 0 \Leftrightarrow A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0}$$

Lema 13.10

Jednačina ravni kroz tri tačke

Na osnovu do sada rečenog jasno je da jednačina ravni kroz tri nekolinearne tačke $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ i $C(x_3, y_3, z_3)$ jeste:

$$((\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times (\vec{r}_A - \vec{r}_C))(\vec{r} - \vec{r}_A) = 0 \quad \text{odnosno}$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Lema 13.11

Prodor prave kroz ravan

Zajednička tačka P ravni $\pi : \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q$ i prave $a : \vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{a}$ dobija se tako što se $\vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{a}$ uvrsti u $\vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q$ i reši dobijena jednačina po t. Tako se dobija da je $t = \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_A)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}$. Ako se tako dobijeno t uvrsti u $\vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{a}$, promenljvi (tekući) vektor $\vec{r}$ postaje $\vec{r}_P$ i sledi formula za prodor P prave $a : \vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{a}$ kroz ravan $\pi : \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q$

$$\boxed{\vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_A)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{a}}$$

Sve projekcije i kose i ortogonalne (normalne) na pravu i na ravan, dobijaju se kao posledica formule prodora $\vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_A)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{a}$.

Ako se u prethodnoj formuli uzme $\vec{r}_Q = (0, 0, 0)$ i $\vec{r}_A = \vec{x}$, tada je $\vec{r}_P$ projekcija vektora $\vec{x}$ $(= \vec{r}_A)$ na ravan $\pi : \vec{n}\vec{r} = 0$ u pravcu vektora $\vec{a}$. Ako se sa f označi funkcija koja svaki vektor $\vec{x}$ projektuje na ravan π u pravcu vektora $\vec{a}$, gde umesto π može biti bilo koja ravan $\beta \parallel \pi$, tada prethodna formula postaje $f(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{\vec{x}\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{a}$ odnosno

$$\boxed{f(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{\vec{n}\vec{x}}{\vec{n}\vec{a}}\vec{a} = \mathbf{pr}_{\pi,\vec{a}}(\vec{x}), \text{ gde je ravan } \pi \perp \vec{n}}$$

Ako se sa g označi funkcija koja svaki vektor $\vec{x}$ koso projektuje na pravac vektora $\vec{a}$ „u pravcu ravni π" (ili paralelno sa ravni π) (videti 16.11 i 16.12), tada je

$$g(\vec{x}) = \vec{x} - f(x) = \vec{x} - (\vec{x} - \frac{\vec{n}\vec{x}}{\vec{n}\vec{a}}\vec{a}) = \boxed{\frac{\vec{n}\vec{x}}{\vec{n}\vec{a}}\vec{a} = \mathbf{pr}_{\vec{a},\pi}(\vec{x}), \quad \pi \perp \vec{n}}$$

Funkcija $\mathbf{pr}_{\vec{a}}(\vec{x}) = \frac{\vec{a}\vec{x}}{\vec{a}\vec{a}}\vec{a}$ (videti 12.20) jeste poseban slučaj funkcije $g(\vec{x}) = \mathbf{pr}_{\vec{a},\pi}(\vec{x}) = \frac{\vec{n}\vec{x}}{\vec{n}\vec{a}}\vec{a}$ za $\vec{n} = \vec{a}$, tj. kada je projekcija normalna.

Funkcija $\mathbf{pr}_{\pi}(\vec{x}) = \vec{x} - \mathbf{pr}_{\vec{n}}(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{\vec{n}\vec{x}}{\vec{n}\vec{n}}\vec{n}$ (videti 12.23 i 12.24) jeste specijalni slučaj funkcije $f(\vec{x}) = \mathbf{pr}_{\pi,\vec{a}}(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{\vec{n}\vec{x}}{\vec{n}\vec{a}}\vec{a}$ za $\vec{n} = \vec{a}$, to jest kada je projekcija normalna.

Drugim rečima, ako se proizvoljni vektor $\vec{x}$ napiše kao zbir dva vektora $\vec{p}$ i $\vec{q}$ tako da je $\vec{p}$ paralelan sa datom pravom $a : \vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{a}$ i $\vec{q}$ paralelan sa datom ravni $\pi : \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q$, tada su vektori $\vec{p}$ i $\vec{q}$ jednoznačno određeni i $\vec{p} = \mathbf{pr}_{\vec{a},\pi}(\vec{x}) = \frac{\vec{n}\vec{x}}{\vec{n}\vec{a}}\vec{a}$ i $\vec{q} = \mathbf{pr}_{\pi,\vec{a}}(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{\vec{n}\vec{x}}{\vec{n}\vec{a}}\vec{a}$.

Funkcija $g(\vec{x})$ može se dobiti iz $\vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_A)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{a}$ ako se uzme da su $\vec{r}_A = 0$, $\vec{r}_Q = \vec{x}$ i $\vec{r}_P = g(\vec{x})$.

Ako se sprovede uopštenje tako što se umesto ravni π i prave a uzmu potprostori W_1 i W_2 prostora $\mathbb{R}^n$, tada funkcija $f(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{\vec{n}\vec{x}}{\vec{n}\vec{a}}\vec{a} = \mathbf{pr}_{\pi,\vec{a}}(\vec{x})$, gde je ravan $\pi \perp \vec{n}$, jeste definisana sa sledećom teoremom:

Teorema 13.12 *Neka su W_1 i W_2 vektorski potprostori vektorskog prostora $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$, $W_1 + W_2 = \{x+y | x \in W_1 \wedge y \in W_2\} = \mathbb{R}^n$ i $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ odnosno $\mathbb{R}^n$ je direktna suma potprostora W_1 i W_2. Uređen par (W_1, W_2) određuje jedinstvenu funkciju $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ koja proizvoljnu n-torku $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ preslikava u n-torku $f(x)$ tako da je $f(x) \in W_1$ i $f(x) \in (x + W_2)$ to jest $\{f(x)\} = W_1 \cap (x + W_2)$ ili $f(x)$ je projekcija vektora x na W_1 „u pravcu" (ili paralelno sa) W_2. Videti 16.12 i 16.11.*

Kose projekcije vektora na pravu i ravan i kose simetije vektora u odnosu na pravu i ravan

Definicija 13.13 *Projekcija tačke A na pravu a „u pravcu ravni α" (ili paralelno sa α) jeste tačka A' koja je presek prave a i ravni β, gde su $A \in \beta$ i $\alpha \parallel \beta$. Ako je $\measuredangle(a, \alpha) = \frac{\pi}{2}$, tada se projekcija naziva normalna ili ortogonalna, u suprotnom je kosa projekcija.*

Teorema 13.14 *Kosa projekcija vektora $\vec{x}$ na pravac vektora $\vec{a}$ „u pravcu ravni π" (ili paralelno ravni π) jeste vektor $\mathbf{pr}_{\vec{a},\pi}(\vec{x}) = \frac{\vec{n}\vec{x}}{\vec{n}\vec{a}}\vec{a} = \vec{z_1}$.*

Teorema 13.15 *Kosa projekcija vektora $\vec{x}$ na ravan π u pravcu vektora $\vec{a}$ jeste vektor $\mathbf{pr}_{\pi,\vec{a}}(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{\vec{n}\vec{x}}{\vec{n}\vec{a}}\vec{a} = \vec{z_2}$.*

Teorema 13.16 *Kosa simetrija vektora $\vec{x}$ u odnosu na pravac vektora $\vec{a}$ „u pravcu ravni π" (ili paralelno ravni π) jeste vektor $2\frac{\vec{n}\vec{x}}{\vec{n}\vec{a}}\vec{a} - \vec{x} = \vec{u_1}$.*

Teorema 13.17 *Kosa simetrija vektora $\vec{x}$ u odnosu na ravan π u pravcu vektora $\vec{a}$ jeste vektor $\vec{x} - 2\frac{\vec{n}\vec{x}}{\vec{n}\vec{a}}\vec{a} = \vec{u_2}$.*

Za vektore iz prethodne četiri teoreme očevidno važi $\vec{x} = \vec{z_1} + \vec{z_2}$, $\vec{z_1} \parallel a$, $\vec{z_2} \parallel \pi$, $\vec{z_1} = \frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{u_1})$, $\vec{z_2} = \frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{u_2})$, $\vec{u_1} = -\vec{u_2}$.

Nacrtati na istoj slici sva četiri slučaja!

Pogledati interpretacije preko matričnog računa! 16.11, 16.12, 16.14 i 16.15.

Lema 13.18

Projekcija (ortogonalna) tačke na pravu

Neka je prava a određena tačkom A koja joj pripada i vektorom $\vec{a}$ sa kojim je paralelna. Projekcija M' tačke M na pravu $a : \vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{a}$ dobija se tako što se postavi ravan α kroz tačku M normalno na pravu a i traži prodor prave a kroz ravan α po prethodnoj formuli. Tako se dobija da je

$$\boxed{\vec{r}_{M'} = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_M - \vec{r}_A)\vec{a}}{\vec{a}\vec{a}}\,\vec{a}}$$

Ako prava prolazi kroz koordinatni početak, tada se za $\vec{r}_A$ može uzeti vektor (tačka) $(0,0,0)$ pa prethodna formula glasi:

$$\vec{r}_{M'} = \frac{\vec{r}_M\vec{a}}{\vec{a}\vec{a}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{r}_M}{\vec{a}\vec{a}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{r}_M}{|\vec{a}|}\,\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \mathbf{pr}_{\vec{a}}(\vec{r}_M).$$

Lema 13.19

Projekcija (ortogonalna) tačke na ravan

Neka je ravan α određena tačkom Q koja joj pripada i vektorom $\vec{n}$ na koji je normalna. Projekcija M' tačke M na ravan $\alpha : \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q$ dobija se tako što se kroz tačku M postavi prava normalna na ravan α i prodorna tačka te prave kroz ravan α biće tražena tačka M':

$$\boxed{\vec{r}_{M'} = \vec{r}_M + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_M)\vec{n}}{\vec{n}\vec{n}}\,\vec{n}}$$

Evo još jednog dokaza, odnosno izvođenja te formule.
Uzećemo da je $\vec{n}\overrightarrow{MQ} > 0$, što očigledno ne utiče na opštost dokaza.

$$\vec{r}_{M'} = \vec{r}_M + \overrightarrow{MM'} = \vec{r}_M + \mathbf{pr}_{\vec{n}}\overrightarrow{MQ} = \vec{r}_M + \frac{\overrightarrow{MQ}\vec{n}}{\vec{n}\vec{n}}\vec{n} = \vec{r}_M + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_M)\vec{n}}{\vec{n}\vec{n}}\,\vec{n}.$$

Ako ravan prolazi kroz koordinatni početak, tada se za $\vec{r}_Q$ može uzeti vektor (tačka) $(0,0,0)$ pa prethodna formula glasi:

$$\vec{r}_{M'} = \vec{r}_M - \frac{\vec{r}_M\vec{n}}{\vec{n}\vec{n}}\,\vec{n}.$$

Definicija 13.20

Zajednička normala n pravih a i b jeste prava koja seče prave a i b, normalna je na prave a i b.

Drugim rečima, prava n je zajednička normala pravih a i b akko je $n \cap a \neq \emptyset \ \wedge \ n \cap b \neq \emptyset \ \wedge \ n \perp a \ \wedge \ n \perp b$

Lema 13.21

Algoritam za konstruisanje zajedničke normale neparalelnih pravih (mimoilaznih ili koje se seku)

Neka je n zajednička normala neparalelnih pravih $a \| \vec{a}$ i $b \| \vec{b}$. Tada se redom konstruišu ravni α i β, tačka $P \in n$ i prava n na sledeći način:

1. $a \subset \alpha \wedge \alpha \| b$, **2.** $b \subset \beta \wedge \beta \perp \alpha$, **3.** $a \cap \beta = \{P\}$ **4.** $n \perp \alpha \wedge P \in n$

Jednačina zajedničke normale je $n : \vec{r} = \vec{r}_P + t(\vec{a} \times \vec{b})$, jer je $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ vektor normalanna prave a i b. Drugim rečima, kroz pravu a postavi se ravan α paralelna s pravom b, kroz pravu b ravan β normalna na ravan α i presek prave a s ravni β jeste tačka P koja pripada traženoj zajedničkoj normali n. Prava koja prolazi kroz tačku P i normalna je na ravan α (na prave a i b) tražena je zajednička normala n.

Lema 13.22

Jedna tačka zajedničke normale mimoilaznih pravih, jednačina te normale i presek dveju prava

Neka su neparalelne prave a i b određene njihovim vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i odgovarajućim tačkama A i B. Tada je jedna tačka P njihove zajedničke normale n određena jednakošću:

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_B - \vec{r}_A)\,\vec{n}_\beta}{\vec{a}\,\vec{n}_\beta}\vec{a} = \vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_B - \vec{r}_A)\,((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b})}{\vec{a}\,((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b})}\vec{a}.$$

Rezultat se dobija tako što se koristi formula 13.11 za prodor prave $a : \vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{a}$ kroz ravan β čiji je vektor normale $\vec{n}_\beta = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b}$ i algoritam za dobijanje zajedničke normale 13.21.

Kako je vektor zajedničke normale $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$, to jednačina zajedničke normale glasi:

$$n : \vec{r} = \vec{r}_P + t(\vec{a} \times \vec{b}).$$

Ukoliko prave a i b nisu mimoilazne, već se seku, tada je $\vec{r}_P$ vektor položaja njihove presečne tačke.

Zajednička normala dveju mimoilaznih pravih može se dobiti i na sledeći način. Neka je prava a paralelna vektoru $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ i prolazi kroz tačku $A(x_1, y_1, z_1)$, a prava b paralelna vektoru $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ i prolazi kroz tačku $B(x_2, y_2, z_2)$. Njihove jednačine u kanoničkom obliku jesu:

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3} = t, \qquad \frac{x - x_2}{b_1} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{b_3} = s.$$

Proizvoljna tačka P sa prave a ima za koordinate linearne funkcije od promenljive t, a proizvoljna tačka Q sa prave b ima za koordinate linearne funkcije od promenljive s, pa onda vektor $\overrightarrow{QP}$ ima za koordinate linearne funkcije od dve promenljive, s i t. S druge strane je $\overrightarrow{QP} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$. Izjednačavanjem tih vektora dobija se sistem od tri linearne jednačine sa tri nepoznate: t, s i λ. Za izračunatu vrednost parametra t dobija se tačka P na pravoj a, a za izračunatu vrednost parametra s dobija se tačka Q na pravoj b. Zajednička normala je određena tačkama P i Q.

Ako prave nisu paralelne, tada je sistem sigurno određen. Ako je ovaj sistem neodređen, to znači da su polazne prave paralelne!

Lema 13.23

Presek dveju ravni

Neka tačke A i B pripadaju redom ravnima α i β, a neka su vektori $\vec{n}_\alpha$ i $\vec{n}_\beta$ normalni redom na ravni α i β. Tada je tačka A' kao projekcija tačke A na pravu $\alpha \cap \beta$, određena na osnovu formule preseka prave i ravni, gde se prava bira tako da joj pripada tačka A i da je kolinearna sa vektorom $(\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta) \times \vec{n}_\alpha$ a za ravan se uzme ravan β. Prema tome, vektor položaja tačke A' glasi VEKTOR PRESEČNICE $= \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta$

$$\vec{r}_{A'} = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_B - \vec{r}_A)\vec{n}_\beta}{\Big((\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta) \times \vec{n}_\alpha\Big)\vec{n}_\beta}\Big((\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta) \times \vec{n}_\alpha\Big),$$

pa jednačina prave $\alpha \cap \beta$ jeste $\vec{r} = \vec{r}_{A'} + t(\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta)$.

Lema 13.24

Rastojanje tačke od ravni

Rastojanje $\boldsymbol{d}(M,\alpha)$ proizvoljne tačke $M(x_1,y_1,z_1)$ od neke ravni $\alpha:\ Ax+By+Cz+D=0$ jednako je projekciji vektora $\overrightarrow{NM}$ na pravac vektora $\vec{n}=(A,B,C)$, gde je $N(x,y,z)$ proizvoljna tačka ravni α:

$$\boldsymbol{d}(M,\alpha)=|\mathbf{pr}_{\vec{n}}\overrightarrow{NM}|=\frac{|\overrightarrow{NM}\vec{n}|}{|\vec{n}|}=$$

$$\frac{|(x_1-x,y_1-y,z_1-z)(A,B,C)|}{|\vec{n}|}=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1-Ax-By-Cz|}{|\vec{n}|}$$

$$=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Lema 13.25

Rastojanje između neparalelnih pravih

Rastojanje $\boldsymbol{d}(a,b)$ između dveju neparalelnih pravih a i b, gde prava a prolazi kroz tačku A i paralelna je sa vektorom $\vec{a}$, a prava b prolazi kroz tačku B i paralelna je sa vektorom $\vec{b}$, jednako je projekciji vektora $\overrightarrow{AB}$ na pravac vektora $\vec{a}\times\vec{b}$ odnosno

$$\boldsymbol{d}(a,b)=|\mathbf{pr}_{\vec{a}\times\vec{b}}\overrightarrow{AB}|=\frac{|(\vec{a}\times\vec{b})\overrightarrow{AB}|}{|\vec{a}\times\vec{b}|}.$$

Lema 13.26

Rastojanje između tačke i prave

Rastojanje $\boldsymbol{d}(a,A)$ između prave a i tačke A jednako je visini paralelograma čija je jedna stranica je $|\vec{a}|$, a druga MA, gde su M neka tačka prave a i $\vec{a}$ vektor sa kojim je paralelna prava a. Znači, $\mathbf{d}(a,A)=\frac{|\vec{a}\times\overrightarrow{MA}|}{|\vec{a}|}=|\overrightarrow{MA}-\mathbf{pr}_{\vec{a}}\overrightarrow{MA}|$.

Lema 13.27
Presek pravih

Neka su prave a i b definisane svojim jednačinama $a : \vec{r} = \vec{r}_A + t_1\vec{a}$ i $b : \vec{r} = \vec{r}_B + t_2\vec{b}$. Kako se traži zajednička tačka S pravih a i b, to se mora izjednačiti promenljivi vektor $\vec{r}$ od prave a s promenljivim vektorom $\vec{r}$ od prave b, pa se dobija

$$\vec{r}_A + t_1\vec{a} = \vec{r}_B + t_2\vec{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = t_1\vec{a} - t_2\vec{b}.$$

Projektovanjem jednačine $\overrightarrow{AB} = t_1\vec{a} - t_2\vec{b}$ na koordinatne ose x, y, z dobiće se tri jednačine sa dve nepoznate, t_1 i t_2.

Ako je sistem protivrečan i ako je $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, tada su prave a i b mimoilazne.

Ako je sistem određen, tada postoje jedinstveni brojevi t_1 i t_2 i jedinstvena presečna tačka S pravih a i b jeste $\vec{r}_S = \vec{r}_A + t_1\vec{a}$ ili $\vec{r}_S = \vec{r}_B + t_2\vec{b}$.

Presek pravih $a: \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3} = t$ i $b: \frac{x-x_2}{b_1} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{b_3} = s$

može se dobiti i tako što se izraze x iz jednačine prave a u zavisnosti od t i x iz jednačine prave b u zavisnosti od s, pa se dobijeni izrazi izjednače, što daje jednu linearnu jednačinu sa dve nepoznate po t i s. Analogno se uradi i sa y i sa z, pa se dobiju tri linearne jednačine sa dve nepoznate t i s. Ako je sistem kontradiktoran, onda ne postoji zajednička tačka pravih, a ako je sistem neodređen, prave se poklapaju; ako je sistem određen, odnosno postoji samo jedno rešenje, onda se prave seku.

DRUGI NAČIN (videti 13.22):

Neka su prave a i b određene njihovim vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i odgovarajućim tačkama A i B i neka se seku, tj. $(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{r}_A - \vec{r}_B) = 0$ i $\vec{a} \times \vec{b} \neq 0$. Tada je zajednička tačka P pravih a i b određena jednakošću:

$$\vec{r}_P = \vec{r}_B + \frac{(\vec{r}_A - \vec{r}_B)\,((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a})}{\vec{b}\,((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a})}\vec{b}.$$

Rezultat se dobija tako što se uzme da je ravan α određena time što joj pripada prava a i normalna je na vektor $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}$ i primeni prethodni rezultat o preseku prave b i ravni α.

Lema 13.28
Pramen ravni

Pramen ravni je skup svih ravni koje prolaze kroz jednu istu pravu. Pramen ravni može se dati, na primer, dvema ravnima koje se seku. Neka se ravni

$$(\star)\ \ \alpha: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \ \text{ i } \ \beta: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

seku. Napisaće se jednačina proizvoljne ravni γ koja pripada pramenu određenom presekom ravni α i β. Kako se ravni α, β i γ seku po istoj pravoj, to su njihovi vektori normala redom

$$\vec{n}_\alpha = (A_1, B_1, C_1), \quad \vec{n}_\beta = (A_2, B_2, C_2) \quad \text{i} \quad \vec{n'}_\gamma$$

komplanarni, pa postoje realni brojevi μ, ξ i ν, gde je bar jedan razlčit od nule, takvi da je $\mu\vec{n'}_\gamma + \xi\vec{n}_\alpha + \nu\vec{n}_\beta = 0$. Ako $\vec{n'}_\gamma$ nije kolinearno sa $\vec{n}_\beta$ ($\gamma \nparallel \beta$ odnosno $\gamma \neq \beta$), tada je $\xi \neq 0$, i deljenjem sa $-\xi$ dobija se $-\frac{\mu}{\xi}\vec{n'}_\gamma = \vec{n}_\alpha + \frac{\nu}{\xi}\vec{n}_\beta$, gde je vektor $-\frac{\mu}{\xi}\vec{n'}_\gamma$ takođe normalan na ravan γ pa će se obeležiti sa $\vec{n}_\gamma$, a broj $\frac{\nu}{\xi}$ sa λ. Znači, dobija se da je $\vec{n}_\gamma = \vec{n}_\alpha + \lambda\vec{n}_\beta$, za neki realni broj λ, gde je $\vec{n}_\gamma$ vektor normale proizvoljne ravni iz tog pramena, izuzev ravni β. Ako tačka $M(x_1, y_1, z_1)$ pripada ravnima α i β, onda pripada i ravni γ pa je jednačina ravni γ

$$(A_1 + \lambda A_2)(x - x_1) + (B_1 + \lambda B_2)(y - y_1) + (C_1 + \lambda C_2)(z - z_1) = 0 \text{ tj.}$$

$$\begin{aligned} &A_1x + B_1y + C_1z + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z) \\ &\qquad\qquad - A_1x_1 - B_1y_1 - C_1z_1 + \lambda(-A_2x_1 - B_2y_1 - C_2z_1) = 0 \end{aligned}$$

odnosno

$$(\star\star) \qquad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

Za svaku ravan iz pomenutog pramena, izuzev ravni β, postoji broj λ takav da jednačina $(\star\star)$ postaje jednačina te ravni, pa se zato jednačina $(\star\star)$ naziva jednačina pramena ravni, izuzev ravni β.

S druge strane, ravan $(\star\star)$ sigurno prolazi kroz presek ravni $(\star)$, jer bi u protivnom sistemi $(\star)$ i $(\star\star)$ bili ili kontradiktorni ili određeni, što je nemoguće jer je $(\star\star)$ linearna kombinacija jednačina $(\star)$.

Lema 13.29
Jednačina simetralne ravni

Neka su date ravni α i β koje se seku i neka su $Q \in \alpha$ i $P \in \beta$ i

$$\alpha: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \ \text{ i } \ \beta: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Naći sada skup svih tačaka $M(x, y, z)$ u prostoru, gde je vektor položaja $\vec{r} = \vec{r}_M = (x, y, z)$, koje su jednako udaljene od ravni α i β. Na osnovu formule

za rastojanje tačke od ravni sledi da je $d(M, \alpha) = d(M, \beta)$ ekvivalentno sa:
$\frac{\vec{n}_\alpha(\vec{r}_Q - \vec{r})}{|\vec{n}_\alpha|} = \pm\frac{\vec{n}_\beta(\vec{r}_P - \vec{r})}{|\vec{n}_\beta|} \Leftrightarrow$

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \pm\frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Traženi skup tačaka je unija skupa tačaka ravni

$$\delta_1 : \frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad \text{i}$$

$$\delta_2 : \frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = -\frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

i svaku od tih dveju ravni, δ_1 i δ_2, nazivamo simetralna ravan za ravni α i β. Odrediti ugao između ravni δ_1 i δ_2.

Lema 13.30

Jednačina simetrale ugla

Neka su date prave a i b koje se seku.

$$a : \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3} \quad \text{i} \quad b : \frac{x - x_2}{b_1} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{b_3}.$$

Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vektori pravih a i b, tada je vektor simetrale ugla $\vec{p} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ i $\vec{q} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$, odnosno ako je $\vec{a}\vec{b} > 0$, tada je $\vec{p}$ vektor simetrale oštrog ugla, a $\vec{q}$ vektor simetrale tupog ugla. Ako je $\vec{a}\vec{b} < 0$, tada je $\vec{q}$ vektor simetrale oštrog ugla, a $\vec{p}$ vektor simetrale tupog ugla. Neka je presek pravih a i b tačka $S(x_S, y_S, z_S)$ i neka su $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ i $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$, tada jednačine simetrala p i q glase:

$$p : \frac{x - x_S}{p_1} = \frac{y - y_S}{p_2} = \frac{z - z_S}{p_3} \quad \text{i} \quad q : \frac{x - x_S}{q_1} = \frac{y - y_S}{q_2} = \frac{z - z_S}{q_3}.$$

Odrediti ugao između pravih p i q.

Zadatak 13.31 *Dokazati da je $(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = 2(a^2 + b^2)$, to jest zbir kvadrata dijagonala paralelograma, jednak je zbiru kvadrata njegovih strana.*

Zadatak 13.32 *Izračunati uglove između dijagonalnih preseka kocke. Postoje dva ugla različitih mernih brojeva! Jedan je $\frac{\pi}{2}$, a drugi je ?*

Zadatak 13.33 *Neka su α, β, γ uglovi koje obrazuje vektor sa osama x, y, z odnosno vektorima $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Dokazati:* $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Uputstvo: $\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k}$.

Primeri sa ispita

1. Odrediti temena A i B jednakostraničnog trougla ABO, gde tačke A i B pripadaju pravoj $p : \vec{r} = \vec{r}_P + t\vec{p}$ i $O(0,0,0) \notin p$.

Rešenje: Neka je S projekcija koordinatnog početka $O(0,0,0)$ na pravu p. Tada su $\vec{r}_S = \vec{r}_P + \frac{((0,0,0)-\vec{r}_P)\vec{p}}{\vec{p}\vec{p}}\vec{p} = \vec{r}_P - \frac{\vec{r}_P\vec{p}}{\vec{p}\vec{p}}\vec{p}$ i $\vec{r}_{A,B} = \vec{r}_S \pm \frac{|\vec{r}_S|}{\sqrt{3}}\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$.

2. Odrediti $\vec{r}_C$ zavisno od $\vec{r}_A$ i $\vec{r}_B$, tako da trougao ABC bude jednakostraničan i da tačke $OABC$ budu komplanarne, gde je $O(0,0,0)$.

Rešenje: $\vec{r}_C = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{AB}|\frac{\vec{d}}{|\vec{d}|}$, gde je $\vec{d} = (\vec{r}_A \times \overrightarrow{AB}) \times \overrightarrow{AB}$.

3. Odrediti $\vec{r}_C$ i $\vec{r}_D$ zavisno od $\vec{r}_A$ i $\vec{r}_B$, tako da ravan kvadrata $ABCD$ sadrži $O(0,0,0)$.

Rešenje:

Za $\vec{d} = (\vec{r}_A \times \overrightarrow{AB}) \times \overrightarrow{AB}$ sledi $\vec{r}_C = \vec{r}_B \pm |\overrightarrow{AB}|\frac{\vec{d}}{|\vec{d}|}$ i $\vec{r}_D = \vec{r}_A + \vec{r}_C - \vec{r}_B$.

4. Neka je ravan α definisana sa $\alpha : \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q$ a tačke A i C određene svojim vektorima položaja $\vec{r}_A$ i $\vec{r}_C$, tako da je $\overrightarrow{AC} \nparallel \vec{n}$. U zavisnosti od vektora $\vec{n}, \vec{r}_Q, \vec{r}_A$ i $\vec{r}_C$ izraziti vektore položaja tačaka B i D temena kvadrata $ABCD$, gde je AC njegova dijagonala i ravan kvadrata $ABCD$ normalna na ravan α.

Rešenje: Neka je β ravan kvadrata $ABCD$, tj. normalna na α i prolazi kroz AC. Tada vektor normale ravni β iznosi $\vec{n}_\beta = \overrightarrow{AC} \times \vec{n}$ i vektor paralelan sa BD je $\vec{d} = \overrightarrow{AC} \times (\overrightarrow{AC} \times \vec{n})$, pa je $\vec{r}_{B,D} = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_C) \pm \frac{1}{2}|\vec{r}_A - \vec{r}_C|\frac{\vec{d}}{|\vec{d}|}$.

5. Neka su ravan $\alpha : \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q$ i prava $p : \vec{r} = \vec{r}_P + t\vec{p}$ takve da $p \nparallel \alpha$ i $Q \notin p$. U zavisnosti od $\vec{r}_Q, \vec{n}, \vec{r}_P$ i $\vec{p}$ izraziti temena A, B, C jednakostraničnog trougla ABC ivice 1, čija temena pripadaju ravni α, težište T trougla pripada i pravoj p, a teme A je maksimalno udaljeno od tačke Q.

Rešenje: Težište T trougla presek je prave p i ravni α, te je $\vec{r}_T = \vec{r}_P + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_P)\cdot\vec{n}}{\vec{n}\cdot\vec{p}}\vec{p}$. Ako je A_1 sredina stranice BC, tada su $TA = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ i $TA_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Kako je teme A maksimalno udaljeno od tačke Q, sledi da su A, Q, T kolinearne i T je između A i Q, pa je $\vec{r}_A = \vec{r}_T + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\overrightarrow{QT}}{|\overrightarrow{QT}|}$, $\vec{r}_{A_1} = \vec{r}_T + \frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{\overrightarrow{TQ}}{|\overrightarrow{TQ}|}$, $\vec{r}_{B,C} = \vec{r}_{A_1} \pm \frac{1}{2}\frac{\overrightarrow{AT}\times\vec{n}}{|\overrightarrow{AT}\times\vec{n}|}$.

6. Neka ravan $\alpha : \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q$ nije normalna na z-osu i neka je tačka $A \notin \alpha$ određena sa $\vec{r}_A$. U zavisnosti od $\vec{r}_Q, \vec{r}_A, \vec{n}$ izraziti $\vec{r}_B, \vec{r}_C, \vec{r}_D$ tako da je $ABCD$ kvadrat, $AB \perp \alpha$, $B \in \alpha$ i BC paralelno sa xOy ravni.

Rešenje

$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_A)\vec{n}}{\vec{n}\vec{n}}\vec{n}$, $\vec{r}_C = \vec{r}_B \pm |\overrightarrow{AB}| \frac{\vec{n}\times\vec{k}}{|\vec{n}\times\vec{k}|}$, gde je $\vec{k} = (0,0,1)$.

7. Neka tačka V određena vektorom položaja $\vec{r}_V$ ne pripada pravoj $p : \vec{r} = \vec{r}_P + t\vec{p}$. U zavisnosti od $\vec{r}_V$, $\vec{r}_P$ i $\vec{p}$ naći vektore položaja $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$, $\vec{r}_C$ i $\vec{r}_D$ temena prave pravilne četvorostrane piramide $VABCD$, ako temena A i C pripadaju pravoj p i dijagonala AC osnove $ABCD$ jednaka je visini piramide.

Rešenje Neka je tačka T projekcija tačke V na pravu p. Tada je

$$\vec{r}_T = \vec{r}_P + \frac{\overrightarrow{PV}\vec{p}}{\vec{p}\vec{p}}\vec{p}, \qquad \vec{r}_{A,C} = \vec{r}_T \pm \tfrac{1}{2}|\overrightarrow{TV}|\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}, \qquad \vec{r}_{B,D} = \vec{r}_T \pm \tfrac{1}{2}|\overrightarrow{TV}|\frac{\overrightarrow{TV}\times\vec{p}}{|\overrightarrow{TV}\times\vec{p}|}.$$

8. Dati su prava $p : \vec{r} = \vec{r}_P + t\vec{p}$ i vektor $\vec{n} \not\perp \vec{p}$. **(a)** Odrediti temena pravilnog šestougla $ABCDEF$ čije teme A pripada pravoj p, centar je koordinatni početak u O i ravan šestougla je normalna na $\vec{n}$. **(b)** Za $\vec{r}_P = (5,5,8)$, $\vec{p} = (-3,1,1)$ i $\vec{n} = (-3,0,20)$ izračunati koordinate tačke A.

Rešenje (a) Jednačina ravni π šestougla je $\pi : \vec{r}\vec{n} = 0$ pa je $A = \alpha \cap p$ odnosno $\vec{r}_A = \vec{r}_P + \frac{-\vec{r}_P\vec{n}}{\vec{n}\vec{p}}\vec{p}$. Iz $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OD}$ sledi $\vec{r}_D = -\vec{r}_A$. Neka je Q projekcija tačaka B i F na duž AO, a R projekcija tačke C i E na duž OD. Tada su $\vec{r}_Q = \frac{1}{2}\vec{r}_A$ i $\vec{r}_R = \frac{1}{2}\vec{r}_D$. Vektori $\overrightarrow{QB}$, $\overrightarrow{QF}$, $\overrightarrow{RC}$ i $\overrightarrow{RE}$ normalni su i na $\vec{n}$ i na $\vec{r}_A \parallel \overrightarrow{AD}$, tj. paralelni su sa $\vec{m} = \vec{r}_A \times \vec{n}$, te su $\vec{r}_{B,F} = \vec{r}_Q \pm \frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{r}_A|\frac{\vec{m}}{|\vec{m}|}$ i $\vec{r}_{C,E} = \vec{r}_R \pm \frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{r}_A|\frac{\vec{m}}{|\vec{m}|}$.

(b) Uvrštavanjem datih vektora u formulu za $\vec{r}_A$ dobija se $\vec{r}_A = (20,0,3)$.

9. Dati su ravan $\alpha : \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q$ i prava $a : \vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{a}, \vec{a}\vec{n} \neq 0$ i $\vec{a} \times \vec{n} \neq 0$. Odrediti temena kvadrata $EFGH$ stranice 5, ako teme E pripada preseku prave i ravni, teme F pravoj a ravan kvadrata normalna na ravan α. Koliko rešenja ima zadatak?

Rešenje E je prodor prave a kroz α, pa je $\vec{r}_E = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_A)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{a}$, a zbog $F \in a$ sledi $\vec{r}_F = \vec{r}_E \pm 5\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$. Vektor $\vec{m}$ normale ravni kvadrata mora biti normalan i na $\vec{n}$ i na $\vec{a}$, te je $\vec{m} = \vec{n} \times \vec{a}$, a vektori $\overrightarrow{EH}$ i $\overrightarrow{FG}$ moraju biti paralelni sa $\vec{p} = \vec{m} \times \vec{a}$, te su $\vec{r}_H = \vec{r}_E \pm 5\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$ i $\vec{r}_G = \vec{r}_F + \vec{r}_H - \vec{r}_E$.

10. Opisati postupak (konstruisati algoritam) za izračunavanje vektora položaja temena jednakostraničnog trougla MNP, gde je $|\overrightarrow{MN}| = \ell$ i čija jedna stranica trougla pripada pravoj $a : \vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{a}$, i tačno jedna stranica pripada ravni $\alpha : \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q$. Diskutovati broj rešenja u zavisnosti od $\vec{r}_A, \vec{a}, \vec{n}, \vec{r}_Q$ i ℓ.

Rešenje a) Ako je $\sphericalangle(\alpha, a) > \frac{\pi}{3}$ zadatak nema rešenja, gde je $\sphericalangle(\alpha, a) = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{|\vec{n}\vec{a}|}{|\vec{n}||\vec{a}|} \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

b) Ako je $\sphericalangle(\alpha, a) = \frac{\pi}{3}$ zadatak ima dva rešenja, ravan trougla je tada normalna na ravan α i $\vec{r}_M = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_A)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{a}$, $\vec{r}_N = \vec{r}_M \pm \ell\frac{(\vec{a}\times\vec{n})\times\vec{n}}{|(\vec{a}\times\vec{n})\times\vec{n}|}$, gde je znak $+$ kada je $\Big((\vec{a}\times\vec{n})\times\vec{n}\Big)\vec{a} > 0$, a u suprotnom je znak $-$. Dalje je $\vec{r}_P = \vec{r}_M \pm \ell\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, gde se ispred ℓ uzima isti znak kao ispred ℓ u prethodnoj jednakosti. Drugo rešenje je centralno simetrično prvom rešenju u odnosu na centar simetrije M, odnosno uzmemo suprotne znake od znakova ispred broja ℓ u prvom rešenju.
c) Za $a \parallel \alpha$ tj. $\vec{n}\vec{a} = 0$ zadatak nema rešenja.
d) Preostao je samo još slučaj $0 < \sphericalangle(\alpha, a) < \frac{\pi}{3}$, jer ugao između prave i ravni je uvek iz intervala $[0, \frac{\pi}{2}]$. Očevidno je da jedno teme, naprimer M, mora biti prodor prave kroz ravan. Primetimo da je skup svih rešenja centralno simetričan u odnosu na centar simetrije M.
Neka MN pripada ravni α i neka je $\overrightarrow{MN} \parallel \vec{p} \in \{(1,\lambda,\delta),(0,1,\delta),(0,0,1)\}$. Napomena: $(1,\lambda,\delta)$ je kraća oznaka za $\vec{i} + \lambda\vec{j} + \delta\vec{k}$. Ako konstruišemo algoritam za izračunavanje vektora $\vec{p}$ tj. realnih brojeva λ i δ, tada je problem rešen jer je $\vec{r}_M = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_A)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{a}$, $\vec{r}_N = \vec{r}_M \pm \ell\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$ i $\vec{r}_P = \vec{r}_M \pm \ell\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$. U jednakosti $\vec{r}_N = \vec{r}_M \pm \ell\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$ uzima se redom i znak $+$ i znak $-$, jer $+$ daje jedno rešenje a $-$ drugo, dok u jednakosti $\vec{r}_P = \vec{r}_M \pm \ell\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ moramo uzeti znak $+$ za $\overrightarrow{MN}\vec{a} > 0$, a u suprotnom $-$.
Kako je oblik vektora $\vec{p} \in \{(1,\lambda,\delta),(0,1,\delta),(0,0,1)\}$ to se on dobija iz nekog od slučajeva:

$$\star \quad \vec{n}(1,\lambda,\delta) = 0 \ \wedge\ \vec{a}(1,\lambda,\delta) = |\vec{a}|\cdot\sqrt{1^2+\lambda^2+\delta^2}\cdot\cos\frac{\pi}{3} \quad \text{ili } \delta \text{ sledi iz}$$

$$\star\star \quad \vec{n}(0,1,\delta) = 0 \ \wedge\ \vec{a}(0,1,\delta) = |\vec{a}|\cdot\sqrt{0^2+1^2+\delta^2}\cdot\cos\frac{\pi}{3} \quad \text{ili je}$$

$$\star\star\star \quad \vec{p} = (0,0,1)$$

U prvom sistemu $(\star)$ prva jednačina je linearna, a druga posle kvadriranja postaje kvadratna jednačina. Iz prve linearne izrazimo λ u zavisnosti od δ i zamenimo u drugu jednačinu, koja tada postaje kvadratna po δ čija rešenja su δ_1 i δ_2, koja sa prvom jednačiniom impliciraju λ_1 i λ_2. Algoritam za rešavanje kvadratne jednačine priznajemo da je svima poznat. Neka su (λ_i, δ_i) rešenja od $\star$ i δ_i' rešenja od $\star\star$.

I Ako sistem $\star$ ima dva realna rešenja tada je $\vec{p} \in \{(1,\lambda_1,\delta_1),(1,\lambda_2,\delta_2),(-1,-\lambda_1,-\delta_1),(-1,-\lambda_2,-\delta_2)$.

II Ako sistem $\star$ ima tačno jedno realno rešenje i sistem $\star\star$ ima tačno jedno realno rešenje, tada $\vec{p} \in \{(1,\lambda_1,\delta_1),(0,1,\delta_1'),(-1,-\lambda_1,-\delta_1),(0,-1,-\delta_1')$.

III Ako sistem $\star$ ima tačno jedno realno rešenje i sistem $\star\star$ nema realnih rešenja, tada je $\vec{p} \in \{(1,\lambda_1,\delta_1),(0,0,1),(-1,-\lambda_1,-\delta_1),(0,0,-1)$.

IV Ako $\star$ nema realnih rešenja i $\star\star$ ima dva realna rešenja, tada je $\vec{p} \in \{(0,1,\delta_1'),(0,1,\delta_2'),(0,-1,-\delta_1'),(0,-1,-\delta_2')\}$.

V Ako $\star$ nema realnih rešenja i $\star\star$ ima tačno jedno realno rešenja, tada je $\vec{p} \in \{(0,1,\delta_1'),(0,0,1),(0,-1,-\delta_1'),(0,0,-1)\}$.

Prema tome ako je $0 < \sphericalangle(\alpha, a) < \frac{\pi}{3}$, tada se može zaključiti čisto geometrijski, a može i analitički da ima tačno 4 rešenja.

10. Odrediti vektore položaja temena kvadrata $MNPR$ zavisno od vektora $\vec{n}$, $\vec{a}$, $\vec{r}_Q$, $\vec{r}_A$ i $\ell \in \mathbb{R}$, ako su $\vec{n}\vec{a} \neq 0$, $\vec{n} \nparallel \vec{a}$, $|\overrightarrow{MN}| = \ell$, jedna stranica kvadrata pripada pravoj $a: \vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{a}$ a jedna stranica ravni $\alpha: \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q$. Koliko postoji takvih kvadrata?

Rešenje Očevidno je da jedno teme, na primer M, mora biti prodorna tačka prave a kroz ravan α, pa sledi $\vec{r}_M = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_A)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{a}$. Ključni deo rešenja jeste konstatacija da je stranica kvadrata koja pripada ravni α, na primer MN, normalna i na $\vec{a}$ i na $\vec{n}$, što implicira $\overrightarrow{MN} \parallel \vec{n}\times\vec{a}$, odnosno $\overrightarrow{MN} = \lambda(\vec{n}\times\vec{a})$ za neki realni broj λ. Na kraju se dobiju sva ostala rešenja $\vec{r}_N = \vec{r}_M + \overrightarrow{MN} = \vec{r}_M \pm \ell\frac{\vec{n}\times\vec{a}}{|\vec{n}\times\vec{a}|}$, $\vec{r}_P = \vec{r}_N \pm \ell\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $\vec{r}_R = \vec{r}_M + \vec{r}_P - \vec{r}_N$. Postoje takva četiri kvadrata.

11. Odrediti vektore položaja temena kvadrata $MNPR$ zavisno od vektora $\vec{n}$, $\vec{a}$, $\vec{r}_Q$, $\vec{r}_A$ i $\ell \in \mathbb{R}$, ako je $\vec{n}\vec{a} \neq 0$, $\vec{n} \nparallel \vec{a}$, $|\overrightarrow{MN}| = \ell$, jedna dijagonala kvadrata pripada pravoj $a : \vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{a}$, a jedna dijagonala ravni $\alpha : \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q$. Koliko postoji takvih kvadrata?

Rešenje Očevidno je da presek S dijagonala mora biti prodorna tačka prave a kroz ravan α, pa sledi $\vec{r}_S = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_A)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{a}$. Ključni deo rešenja jeste konstatacija da je dijagonala kvadrata koja pripada ravni α, na primer MP, normalna i na $\vec{a}$ i na $\vec{n}$, što implicira $\overrightarrow{MP} \parallel \vec{n} \times \vec{a}$, tj. $\overrightarrow{MP} = \lambda(\vec{n} \times \vec{a})$ za neki realni broj λ. Sada sledi $\vec{r}_{M,P} = \vec{r}_S \pm \overrightarrow{SM} = \vec{r}_S \pm \ell\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\vec{n}\times\vec{a}}{|\vec{n}\times\vec{a}|}$ i $\vec{r}_{N,R} = \vec{r}_S \pm \ell\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$. Postoji takav jedan kvadrat.

12. Odrediti vektore položaja temena jednakostraničnog trougla MNP zavisno od vektora $\vec{n}$, $\vec{a}$, $\vec{r}_Q$, $\vec{r}_A$ i $\ell \in \mathbb{R}$, ako je $\vec{n}\vec{a} \neq 0$, $\vec{n} \nparallel \vec{a}$, $|\overrightarrow{MN}| = \ell$, stranica MN pripada ravni $\alpha : \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q$ i visina koja odgovara stranici MN pripada pravoj $a : \vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{a}$. Koliko postoji takvih trouglova?

Rešenje Očevidno je da podnožje S visine iz temena P na stranicu MN, mora biti prodorna tačka prave a kroz ravan α, pa sledi $\vec{r}_S = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_A)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{a}$. Ključni deo rešenja jeste konstatacija da je stranica MN, koja pripada ravni α, normalna i na $\vec{a}$ i na $\vec{n}$, što mplicira $\overrightarrow{MN} \parallel \vec{n} \times \vec{a}$, odnosno $\overrightarrow{MN} = \lambda(\vec{n} \times \vec{a})$ za neki realni broj λ. Sledi $\vec{r}_{M,N} = \vec{r}_S \pm \overrightarrow{SM} = \vec{r}_S \pm \frac{1}{2}\ell\frac{\vec{n}\times\vec{a}}{|\vec{n}\times\vec{a}|}$ i $\vec{r}_P = \vec{r}_S \pm \ell\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$. Postoje takva dva trougla.

Poglavlje 14

VEKTORSKI PROSTORI

U odeljku „Slobodni vektori" dokazano je sledeće:

1. $(V, +)$ je Abelova grupa,
2. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$,
3. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$,
4. $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$,
5. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

za sve realne brojeve α i β i sve slobodne vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Međutim, postoji mnogo algebarskih struktura u kojima važe zakoni **1**, **2**, **3**, **4** i **5**. Zato je celishodno definisati algebarsku strukturu u kojoj će **1**, **2**, **3**, **4** i **5** biti aksiomi i proučiti tu strukturu, jer se time analiziraju i mnoge druge strukture.

Definicija 14.1 *Neka su V neprazan skup, F polje i neka je $+$ binarna operacija koja preslikava skup V^2 u skup V, a $\cdot$ binarna operacija koja preslikava skup $F \times V$ u skup V. Tada je uređena četvorka $(V, F, +, \cdot)$ vektorski prostor* *nad poljem F ako važe aksiomi:*

$$\begin{array}{ll} V_1 & (V,+) \quad \textit{je Abelova grupa}, \\ V_2 & \alpha\cdot(a+b)=\alpha\cdot a+\alpha\cdot b, \\ V_3 & (\alpha+\beta)\cdot a=\alpha\cdot a+\beta\cdot a, \\ V_4 & (\alpha\cdot\beta)\cdot a=\alpha\cdot(\beta\cdot a), \\ V_5 & 1\cdot a=a. \end{array}$$

za sve elemente a i b iz skupa V i sve elemente α i β iz polja F.

Elementi polja F nazivaju se skalari, a elementi skupa V vektori. Skalari će se obeležavati malim grčkim slovima, a vektori malim slovima latinice. Neutralni element grupe $(V,+)$ označavaće se sa 0 kao i nula polja F, jer će iz konteksta biti jasno da li je reč o nula vektoru ili nula skalaru.

Uobičajeno je da se umesto $\alpha\cdot a$ piše samo αa i umesto $\alpha\cdot\beta$ samo $\alpha\beta$.

Za vektorski prostor $(V,F,+,\cdot)$ kratko će se reći i pisati samo prostor V nad poljem F ili, ako je iz konteksta jasno o kom polju je reč, reći će se samo prostor V.

Primer 1. Slobodni vektori nad poljem realnih brojeva u odnosu na operaciju sabiranja slobodnih vektora i operaciju množenja realnog broja slobodnim vektorom čine vektorski prostor nad poljem realnih brojeva.

Primer 2. Uređena četvorka $(F^n,F,+,\cdot)$ je vektorski prostor gde je F proizvoljno polje a operacije $+$ i $\cdot$ definisane su kao:

$$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)+(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\ldots,\alpha_n+\beta_n),$$

$$\alpha\cdot(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=(\alpha\alpha_1,\alpha\alpha_2,\ldots,\alpha\alpha_n).$$

Dokazati!

NAPOMENA: Nula vektor označavaće se istim simbolom kao i nula polja F, odnosno sa 0. Tako, na primer, umesto (0,0,. . . ,0) pisaće se 0.

Ako se uoče restrikcije prethodno definisanih operacija nad skupom rešenja homogenog sistema linearnih jednačina, dobija se vektorski prostor rešenja homogenih linearnih jednačina.

Primer 3. Skup svih polinoma nad poljem F stepena ne većeg od n u odnosu na operaciju sabiranja polinoma i množenja elemenata polja F polinomima, jeste vektorski prostor nad poljem F. Dokazati!

Primer 14.2 *Uređena četvorka $(\mathcal{A},\mathbb{R},+,\cdot)$, gde je $\mathcal{A}$ skup funkcija koje preslikavaju polje $\mathbb{R}$ u polje $\mathbb{R}$, ili $\mathcal{A}=\{f|f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$, vektorski je prostor* *nad poljem* $\mathbb{R}$*, gde su operacije* $+$ *i* $\cdot$ *definisane kao:*

$$(\forall f \in \mathcal{A})(\forall g \in \mathcal{A}) \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)\,,$$

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall f \in \mathcal{A}) \quad (\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x)$$

za svako x *iz polja* $\mathbb{R}$*.*

Dokazati!

Primećuje se da funkcija $\mathcal{O}$ definisana sa $\mathcal{O}(x) = 0$, za svako x iz polja $\mathbb{R}$, jeste neutralni element za sabiranje u skupu funkcija $\mathcal{A}$. Takođe, funkcija $-f$ definisana sa $(-f)(x) = -f(x)$ za sve x iz $\mathbb{R}$, inverzni je element u odnosu na sabiranje funkcija, za funkciju f. Verifikacija ostalih aksioma vektorskog prostora, za ovaj primer, jednostavna je.

Ako se u prethodnom primeru uzme da je skup svih funkcija $\mathcal{A} = \{f | f : X \longrightarrow \mathbb{R}\}$, gde su X neki proizvoljni skup i $\mathbb{R}$ polje realnih brojeva, opet će se dobiti primer vektorskog prostora. Primeri vektorskog prostora dalje se mogu dobiti ako se za skup $\mathcal{A}$ ne uzme skup *svih* funkcija, već skup funkcija s važnom posebnom osobinom. Tako se dobijaju vektorski prostori

- neprekidnih funkcija,
- diferencijabilnih funkcija,
- rešenja homogenih linearnih diferencijalnih jednačina.

Od brojnih primera vektorskih prostora sreću se primeri vektorskih prostora matrica, homomorfizama (operatora), Liovih algebri, Hilbertovih, Banahovih i drugih.

Test 14.3 *Koje od sledećih uređenih četvorki su linearni vektorski prostori:*
a) $(\{\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k} \,|\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}, \mathbb{R}, +, \times)$, b) $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot)$,
c) $(\mathbb{C}, \mathbb{R}, +, \cdot)$, d) $(\mathbb{C}, \mathbb{C}, +, \cdot)$, e) $(\mathbb{C}, \mathbb{Q}, +, \cdot)$, f) $(\mathbb{R}, \mathbb{Q}, +, \cdot)$,
g) $(\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}, \mathbb{R}, +, \circ)$, h) $(\{\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k} \,|\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}, \mathbb{Q}, +, \times)$,
i) $(\{\alpha\vec{i} \,|\alpha \in \mathbb{R}\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$, j) $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$, k) $(\{\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} \,|\alpha, \beta \in \mathbb{R}\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$.

VAŽNA NAPOMENA:

Za svaku teoremu i definiciju iz vektorskog prostora uvek uočiti i geometrijsku interpretaciju u $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$, jer sve postaje mnogo jasnije!

Teorema 14.4 *Ako je $(V, F, +, \cdot)$ vektorski prostor, tada za svako α iz F i svako a iz V važi:*

1. $\alpha \cdot 0 = 0,$
2. $0 \cdot a = 0,$
3. $\alpha \cdot a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \vee a = 0,$
4. $(-\alpha) \cdot a = -(\alpha \cdot a),$
5. $\alpha \cdot (-a) = -(\alpha \cdot a),$
6. $(-\alpha) \cdot (-a) = \alpha \cdot a,$
7. $-a = (-1) \cdot a.$

Dokaz

1. $\alpha \cdot 0 \overset{V_1}{=} \alpha \cdot 0 + 0 \overset{V_1}{=} \alpha \cdot 0 + (\alpha \cdot 0 - (\alpha \cdot 0)) \overset{V_1}{=} (\alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0) - (\alpha \cdot 0) \overset{V_2}{=} \alpha \cdot (0 + 0) - (\alpha \cdot 0) \overset{V_1}{=} \alpha \cdot 0 - (\alpha \cdot 0) \overset{V_1}{=} 0.$

2. $0 \cdot a \overset{V_1}{=} 0 \cdot a + 0 \overset{V_1}{=} 0 \cdot a + (0 \cdot a - (0 \cdot a)) \overset{V_1}{=} (0 \cdot a + 0 \cdot a) - (0 \cdot a) \overset{V_3}{=} (0 + 0) \cdot a - (0 \cdot a) \overset{V_1}{=} 0 \cdot a - (0 \cdot a) \overset{V_1}{=} 0.$

3. Na osnovu dva prethodna dokaza sledi $\alpha = 0 \vee a = 0 \Rightarrow \alpha \cdot a = 0$. Dokazati suprotni smer, odnosno neka je $\alpha \cdot a = 0$. Skalar α ili je jednak nuli ili različit od nule. Ako je jednak nuli, tvrđenje je dokazano a ako je različit od nule, tada postoji njemu inverzni α^{-1} u odnosu na množenje u polju F. Pomnoži li se jednakost $\alpha \cdot a = 0$ sa α^{-1} dobija se

$$\alpha^{-1}(\alpha \cdot a) = \alpha^{-1} \cdot 0 \overset{1, V_4}{\Rightarrow} (\alpha^{-1}\alpha) \cdot a = 0 \overset{F}{\Rightarrow} 1 \cdot a = 0 \overset{V_5}{\Rightarrow} a = 0.$$

4.

$$(-\alpha) \cdot a \overset{V_1}{=} (-\alpha) \cdot a + 0 \overset{V_1}{=} (-\alpha) \cdot a + (\alpha \cdot a - (\alpha \cdot a)) \overset{V_1}{=} ((-\alpha) \cdot a + \alpha \cdot a) - (\alpha \cdot a)$$

$$\overset{V_3}{=} (-\alpha + \alpha) \cdot a - (\alpha \cdot a) \overset{F}{=} 0 \cdot a - (\alpha \cdot a) \overset{2.}{=} 0 - (\alpha \cdot a) \overset{V_1}{=} -(\alpha \cdot a).$$

5. Na osnovu aksioma V_1, V_2 i dokazanog pod 2 sledi:

$$\alpha \cdot (-a) = \alpha \cdot (-a) + 0 = \alpha \cdot (-a) + (\alpha \cdot a - (\alpha \cdot a)) =$$

$$= (\alpha \cdot (-a) + \alpha \cdot a) - (\alpha \cdot a) \overset{V_2}{=} \alpha \cdot (-a + a) - (\alpha \cdot a) =$$

$$= \alpha \cdot 0 - (\alpha \cdot a) \overset{2.}{=} 0 - (\alpha \cdot a) = -(\alpha \cdot a).$$

6.
$$(-\alpha)\cdot(-a) \stackrel{4.}{=} -(\alpha\cdot(-a)) \stackrel{5.}{=} -(-(\alpha\cdot a)) \stackrel{5.10.}{=} \alpha\cdot a. \quad \square$$

Kako je dogovoreno da će se u prstenu i polju $\alpha\cdot\beta$ označavati i sa $\alpha\beta$, tako se utvrđuje i da se $\alpha\cdot a$ označava kratko sa αa.

7. $(-1)\cdot a \stackrel{4.}{=} -(1\cdot a) \stackrel{V_5}{=} -a.$ $\square$

Zbog poslednje tri jednakosti jasno je da se umesto $-(\alpha a)$ može pisati samo $-\alpha a$.

Ako se uoči neki neprazan podskup skupa slobodnih vektora, postavlja se pitanje da li je taj podskup **uvek** vektorski prostor nad poljem realnih brojeva u odnosu na sabiranje slobodnih vektora i množenje realnih brojeva slobodnim vektorima. Odgovor na pitanje je negativan. Odnosno, ako se uoči skup svih slobodnih vektora koji polaze iz koordinatnog početka a završavaju u nekoj ravni kojoj ne pripada koordinatni početak, onda taj podskup skupa slobodnih vektora očito nije vektorski prostor, jer sabiranjem dva vektora iz tog skupa dobija se vektor koji očevidno ne pripada tome skupu. Ali ako se uzme skup svih slobodnih vektora koji su svi paralelni jednoj datoj fiksnoj ravni, onda taj podskup skupa slobodnih vektora jeste vektorski prostor u odnosu na pomenute operacije. Zato se daje sledeća definicija.

Definicija 14.5 *Neka je V vektorski prostor nad poljem F. Tada se podskup W skupa V naziva vektorski potprostor prostora V ako je W neprazan skup i ako W jeste vektorski prostor nad poljem F u odnosu na restrikcije operacija sabiranja u V i množenja skalara iz F i vektora iz V.*

Na primer, skup svih međusobno kolinearnih vektora je vektorski potprostor prostora svih slobodnih vektora, prostor neprekidnih funkcija koje preslikavaju skup realnih brojeva u skup realnih brojeva jeste potprostor prostora svih funkcija $\{f | f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ itd.

Prazan skup ne može biti vektorski prostor jer aksioma o postojanju neutralnog elementa u grupi zahteva postojanje bar jednog elementa 0 u skupu, za koji važi $a + 0 = a$.

Svaki vektorski prostor $\mathcal{V} \neq (\{0\}, F, +, \cdot)$ ima bar dva potprostora. To su $(\{0\}, F, +, \cdot)$ i sam on $(V, F, +, \cdot)$ i nazivaju se trivijalni potprostori.

Teorema 14.6 *Podskup W prostora V je potprostor prostora V ako i samo ako je W neprazan podskup od V i za svaka dva elementa, x i y iz W, i svaki skalar α iz F važi da je*

$$x + y \in W \quad i \quad \alpha x \in W.$$

Dokaz($\Rightarrow$) Ako W jeste potprostor od V, po definiciji potprostora sledi da za $x, y \in W$ i $\alpha \in F$ je $x + y \in W$ i $\alpha x \in W$.

($\Leftarrow$) Dokazati da važi i u suprotnom smeru, tj. neka sada bude da su $x+y \in W$ i $\alpha x \in W$ za sve $x, y \in W$ i sve $\alpha \in F$. Aksiomi V_2, V_3, V_4, V_5 važe jer se u njima pojavljuje samo kvantifikator $\forall$ (za svako), pa ako neki iskaz važi za svako x iz nekog skupa, onda jasno važi i za svako x iz nekog njegovog podskupa. Prema tome, ostalo je samo da se provere one aksiome Abelove grupe u kojima se javlja kvantifikator $\exists$, a to su aksiomi o neutralnom i inverznom elementu. Znači, treba proveriti da li nula vektor iz prostora V pripada i skupu W. Kako je $\alpha x \in W$ za svako $\alpha \in F$ i svako $x \in W$, uzeti $\alpha = 0$ i primenom teoreme 14.4 dobiti $0 \cdot x \in W$, odnosno $0 \in W$. Još treba samo proveriti da li za svako x iz W sledi da je i $-x$ iz W. Opet iz $\alpha x \in W$ uzimanjem $\alpha = -1$ sledi $-1 \cdot x \in W \Rightarrow -(1 \cdot x) \in W \Rightarrow -x \in W$ zbog teoreme 14.4 i aksiome V_5. $\square$

Teorema 14.7 *Podskup W prostora V jeste potprostor prostora V ako i samo ako je W neprazan podskup od V i za svaka dva elementa, x i y iz W i svaka dva skalara α i β iz F važi da je*

$$\alpha x + \beta y \in W.$$

Dovoljno je dokazati ekvivalentnost poslednjih dveju teorema. Iz teoreme 14.7 sledi teorema 14.6 jer ako se u $\alpha x + \beta y \in W$ uzme $\beta = 0$, dobija se $\alpha x \in W$, a ako je $\alpha = \beta = 1$, dobija se $x + y \in W$. Obratno, ako su x i y iz W i α i β iz F, tada zbog teoreme 14.6 prvo sledi da su αx i βy iz W, a dalje, opet zbog teoreme 14.6, sledi da je $\alpha x + \beta y \in W$. $\square$

Definicija 14.8 *Neka je V vektorski prostor nad poljem F. Vektor $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n$ je* **linearna kombinacija n-torke vektora** *$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, gde su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ proizvoljni skalari iz polja F i $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, to jest prirodan broj.*

Kaže se i da je $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n$ linearna kombinacija vektora $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Podrazumevaće se da je uređena n-torka definisana samo za n prirodan broj odnosno $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

Definicija 14.9 *Skup svih linearnih kombinacija n-torke vektora* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *prostora* V *nad poljem* F *označavaće se sa*

$$L(a_1, a_2 \ldots, a_n) = \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n | \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F\}$$

i nazvaće se ***lineal od n-torke*** $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *ili prostor generisan vektorima* $a_1, a_2 \ldots, a_n$.

Često korišćena oznaka u literaturi za lineal n-torke vektora jeste i

$$< a_1, a_2 \ldots, a_n > .$$

Teorema 14.10 *Skup svih linearnih kombinacija n-torke vektora* $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *prostora* V *jeste potprostor prostora* V *(odnosno lineal* $L(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *je potprostor prostora* V *generisan n-torkom vektora* A*).*

Dokaz Zbir dve linearne kombinacije n-torke A opet je linearna kombinacija n-torke A

$$(\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n) + (\beta_1 a_1 + \ldots + \beta_n a_n) = (\alpha_1 + \beta_1) a_1 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n) a_n$$

i proizvod skalara i linearne kombinacije n-torke A je linearna kombinacija n-torke A

$$\alpha(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n) = (\alpha\alpha_1) a_1 + (\alpha\alpha_2) a_2 + \ldots + (\alpha\alpha_n) a_n.$$

Na osnovu teoreme 14.6 sledi tvrđenje. □

Teorema 14.11 *Svaki potprostor prostora* $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ *jeste vektorski prostor skupa svih rešenja nekoga homogenog sistema linearnih jednačina nad poljem* $\mathbb{R}$. *Dokažite sami!*

To znači da SVI vektorski potprostori vektorskog prostora $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ jesu sve ravni i sve prave koje prolaze kroz koordinatni početak, kao i trivijalni potprostori $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ i $(\{(0,0,0)\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$.

Veoma važni pojmovi u linearnoj algebri jesu linearna zavisnost i nezavisnost neke n-torke vektora. Evo tih definicija.

Definicija 14.12 *Neka n-torka vektora* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *linearno je zavisna ako postoje skalari* $\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *takvi da je bar jedan od njih različit od nule i* $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n = 0$.

Teorema 14.13 *Proizvoljna n-torka vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ linearno je zavisna ako i samo ako je bar jedan od njenih vektora linearna kombinacija preostalih vektora.*

Dokaz Ako je n-torka $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ zavisna, tada je u linearnoj kombinaciji te n-torke koja je jednaka nuli, bar jedan skalar različit od nule. Vektor uz taj skalar očevidno se može napisati kao linearna kombinacija preostalih vektora. Obratno.

Ako je neki vektor n-torke $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ linearna kombinacija preostalih vektora, tada se prebacivanjem svih vektora na jednu stranu jednakosti dobija linearna kombinacija n-torke $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ jednaka nuli, a jedan skalar je jedinica odnosno različit od nule. □

Teorema 14.14 *Svaka uređena n-torka vektora koja sadrži nula vektor je linearno zavisna.*

Dokaz Sačiniti linearnu kombinaciju tih vektora tako da uz nula vektor bude skalar različit od nule, na primer 1, a skalari ispred svih ostalih vektora neka su nule. Ova linearna kombinacija očevidno je jednaka nuli, a postoji skalar različit od nule, što znači da je n-torka zavisna.

Definicija 14.15 *Ako n-torka vektora nije linearno zavisna, tada se za nju kaže da je linearno nezavisna.*

Definicija 14.16 *Uređena n-torka vektora je linearno nezavisna ako i samo ako je $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \ldots, \alpha_n a_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.*

Proveriti ekvivalentnost prethodnih dveju definicija!

Znači, n-torka vektora $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ linearno je nezavisna ako i samo ako je njena linearna kombinacija nula vektor jedino kada su svi skalari jednaki nuli i ni u jednom drugom slučaju, u protivnom linearna kombinacija tih vektora bila bi jednaka nuli i bar jedan skalar različit od nule, odakle bi se vektor uz taj skalar mogao predstaviti kao linearna kombinacija preostalih, pa bi n-torka A bila linearno zavisna. Videti 14.13.

Takođe se može reći da je n-torka vektora $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ linearno nezavisna akko se nijedan od vektora te n-torke ne može izraziti kao linearna kombinacija preostalih vektora. (Dokazati!)

Definicija 14.17 *Za skup od n* **različitih** *vektora* $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *kaže se da je linearno zavisan ili nezavisan ako je n-torka vektora* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *linearno zavisna odnosno nezavisna.*

Na primer, trojka vektora $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ linearno je nezavisna jer jednakost $\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k} = 0$ implicira da mora biti $\alpha = \beta = \gamma = 0$, u protivnom bi jedan od ta tri vektora bio linearna kombinacija preostala dva, što je očevidno nemoguće.

Na osnovu teoreme 12.18 sledi da je uređena trojka slobodnih vektora linearno nezavisna ako i samo ako je nekomplanarna.

Primer 1. Skup vektora $\{(2,3), (-1,5)\}$ linearno je nezavisan jer je jednakost $\alpha(2,3) + \beta(-1,5) = 0$ tačna ako i samo ako su $2\alpha - \beta = 0$ i $3\alpha + 5\beta = 0$, a ovaj sistem je ekvivalentan sa $\alpha = 0$ i $\beta = 0$.

Lako se uočava da su dva vektora, to jest dve uređene n-torke zavisne akko su njima odgovarajuće komponente proporcionalne.

Primer 2. Skup vektora $\{(2,3,-1), (1,5,2), (4,13,3)\}$ linearno je zavisan jer je $1 \cdot (2,3,-1) + 2 \cdot (1,5,2) + (-1) \cdot (4,13,3) = (0,0,0) = 0$.

Primer 3. Skup vektora $\{(1,2,3), (4,5,6), (7,8,8)\}$ linearno je nezavisan jer je $\alpha(1,2,3) + \beta(4,5,6) + \gamma(7,8,8) = 0$ ekvivalentno sistemu jednačina

$$\begin{array}{llll} \alpha & +4\beta & +7\gamma & = 0 \\ 2\alpha & +5\beta & +8\gamma & = 0 \\ 3\alpha & +6\beta & +8\gamma & = 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \land \beta = 0 \land \gamma = 0$$

koji očevidno ima samo jedno rešenje (0,0,0). Kada bi taj sistem pored ovog, trivijalnog rešenja (0,0,0) imao i neka druga rešenja, tada bi data uređena trojka vektora bila linearno zavisna.

Lako se pokazuje da je trojka vektora $\Big((1,2,3), (4,5,6), (7,8,9)\Big)$ zavisna, jer je mešoviti proizvod slobodnih vektora $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{c} = 7\vec{i} + 8\vec{j} + 9\vec{k}$ jednak nuli, tj. determinanta $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ jednaka nuli.

Primer 4. Ako je domen funkcija f i g skup $[-1,1]$ i ako su one definisane sa $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ i $g(x) = \operatorname{arctg} x$, tada je uređen par funkcija (f,g) linearno zavisan. Dokazati.

Primer 5. Ako je domen funkcija f i g skup $[1,\infty)$ i ako su one definisane sa $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ i $g(x) = \operatorname{arctg} x$, tada je uređen par funkcija (f,g) linearno nezavisan. Dokazati.

Prethodni primeri pokazuju da je uređen par funkcija (f, g) i zavisan i nezavisan! Da li je to protivrečno? Ako nije, objasniti zašto nije? Pogledati 3.56, 3.58 i 3.59.

Primer 6. Ispitati linearnu zavisnost uređene trojke funkcija (f, g, h) koje preslikavaju skup $A \subseteq \mathbb{R}$ u skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ definisane sa $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$, $g(x) = \operatorname{arctg} x$ i $h(x) = 1$, ako je A interval:
a) $(-\infty, -1]$ b) $[-1, 1]$ c) $[1, \infty)$ d) $(-\infty, \infty)$
e) koji nije podskup nijednog od intervala $(-\infty, -1], [-1, 1]$ i $[1, \infty)$.

Primer 7. Ispitati linearnu zavisnost uređene trojke funkcija (f, g, h) koje preslikavaju skup $\mathbb{R}$ u skup $\mathbb{R}$ definisane sa $f(x) = 1$, $g(x) = x$ i $h(x) = x^2$.

Definicija 14.18 *Uređena n-torka vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ generiše prostor V ako se svaki vektor iz V može predstaviti kao linearna kombinacija te n-torke vektora, odnosno ako je $L(a_1, a_2, \ldots, a_n) = V$.*

Definicija 14.19 *Za n-torku vektora $B = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ kaže se da je* ***baza*** *prostora $(V, F, +, \cdot)$ ako je B linearno nezavisna i ako B generiše V odosno $L(a_1, a_2, \ldots, a_n) = V$.*

Drugim rečima, n-torka vektora $B = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ jeste baza prostora V akko se svaki vektor prostora V može napisati kao linearna kombinacija vektora n-torke B i ako je n-torka B linearno nezavisna.

Primer 1. Jedna baza prostora $(F^3, F, +, \cdot)$ jeste

$$B = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)).$$

Ovakve baze, čiji su svi vektori jedinični i svaka dva vektora normalna, nazivaju se ortonormirane baze. Specijalno, ortonormirana baza u primeru 1, imenuje se kao standardna ortonormirana baza.

Primer 2. Triedar nekomplanarnih vektora $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ jeste baza prostora svih slobodnih vektora. (Videti teoremu 12.18)

Iz prethodnog primera vidi se da vektorski prostor slobodnih vektora ima beskonačno mnogo različitih baza, ali sve one očevidno imaju isti broj vektora, odnosno to su samo uređene ***trojke*** nekomplanarnih vektora.

Ovaj primer upućuje na činjenicu da sve baze istog vektorskog prostora imaju isti broj vektora, što će biti i dokazano.

Za proizvoljnu n-torku vektora kaže se da je maksimalna linearno nezavisna akko se dodavanjem proizvoljnog vektora toj n-torci dobija $(n+1)$-torka koja je linearno zavisna.

Teorema 14.20 *(Teorema o maksimalno linearno nezavisnoj* $\boldsymbol{n}$*-torki) Proizvoljna* n*-torka vektora jeste baza prostora* V *ako i samo ako je ta* n*-torka maksimalno linearno nezavisna.*

Dokaz ($\Rightarrow$)
Ako je n-torka B baza prostora V, tada dodavanjem proizvoljnog vektora ona postaje zavisna, jer se taj vektor može izraziti preostalim vektorima, pa je B zaista maksimalna linearno nezavisna n-torka.
($\Leftarrow$)
Ako je n-torka $B = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ maksimalno linearno nezavisna a da bi ona bila baza, treba još dokazati da generiše prostor V. Dokazati to kontradikcijom. Pretpostavi li se suprotno, tj. da postoji vektor $x \notin \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ koji se ne može izraziti kao linearna kombinacija n-torke B, tada iz

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n + \alpha x = 0$$

sledi da je $\alpha = 0$ (jer bi se za $\alpha \neq 0$ vektor x mogao izraziti kao linearna kombinacija n-torke B), pa se dobija

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n = 0,$$

a iz toga sledi $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ jer je B linearno nezavisna. Dobija se da je $B = (a_1, a_2, \ldots, a_n, x)$ linearno nezavisna, što je kontradikcija s uslovom da je $B = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ **maksimalna** linearno nezavisna n-torka. □

Za proizvoljnu n-torku vektora prostora V kaže se da je minimalna n-torka generatora akko se izbacivanjem proizvoljnog vektora iz te n-torke dobija $(n-1)$-torka koja ne generiše prostor V.

Teorema 14.21 *(Teorema o minimalnoj* $\boldsymbol{n}$*-torki generatora) Proizvoljna* n*-torka vektora* B *jeste baza prostora* V *ako i samo ako je* n*-torka minimalna* n*-torka generatora.*

Dokaz ($\Rightarrow$)
Ako je B baza prostora V, izbacivanjem proizvoljnog vektora x iz B dobija se $(n-1)$-torka čijom se linearnom kombinacijom ne može dobiti vektor x jer bi tada B bila zavisna, pa je B zaista minimalna n-torka generatora.
($\Leftarrow$)
Ako je B minimalna n-torka generatora, tada da bi ona bila i baza prostora V, treba samo dokazati da je linearno nezavisna. Dokaz se izvodi kontradikcijom. Pretpostavi li se suprotno, tj. da je B linearno zavisna, tada

se bar jedan vektor n-torke B može predstaviti kao linearna kombinacija preostalih vektora, i oni očevidno generišu prostor V, što je kontradiktorno uslovu da je B minimalna n-torka generatora. □

Teorema 14.22 *(Teorema o jedinstvenoj reprezentaciji) Proizvoljna n-torka vektora B jeste baza prostora V ako i samo ako se svaki vektor prostora V može na jedinstven način predstaviti kao linearna kombinacija vektora n-torke B.*

Dokaz ($\Rightarrow$)

Neka je $B = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ baza prostora V. Dokazati kontradikcijom da se svaki vektor x prostora V može na jedinstven način predstaviti kao linearna kombinacija vektora baze B. Ako se pretpostavi suprotno, to jest da postoje dve različite reprezentacije vektora x u bazi B, onda sledi:

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, + \ldots + \alpha_n a_n = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2, + \ldots + \beta_n a_n.$$

Ovo je dalje ekvivalentno sa

$$(\alpha_1 - \beta_1)a_1 + (\alpha_2 - \beta_2)a_2, + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)a_n = 0.$$

Kako je B linearno nezavisna n-torka prostora V, to sledi:

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0 \ \land \ldots \land \ \alpha_n - \beta_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 = \beta_1 \ \land \ldots \land \ \alpha_n = \beta_n.$$

Ovo je kontradikcija pretpostavci da postoje dve različite reprezentacije vektora x u bazi B.

($\Leftarrow$)

Poći će se od iskaza da svaki vektor ima jedinstvenu reprezentaciju u bazi B. Tada i nula vektor ima jedinstvenu reprezentaciju u bazi B:

$$0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n,$$

što implicira $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ odnosno B je linearno nezavisna n-torka. Kako je po uslovu n-torka B i generatorna, ona je ujedno i baza prostora V. □

Poslednje tri teoreme zapravo su ekvivalentne definicije baze linearnog vektorskog prostora. Znači, date su četiri ekvivalentne definicije baze vektorskog prostora, tj. bilo koja od te četiri može se uzeti za definiciju, a preostale tri su onda teoreme.

Zadatak 14.23 *Neka su* $z_1 = a + ib, z_2 = c + id \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *susedna temena kvadrata* $z_1z_2z_3z_4$, *gde je* z_1z_3 *dijagonala, smer konture* $z_1z_2z_3z_4$ *je negativan i* $\arg z_1 \neq \arg z_2 \wedge |\arg z_1 - \arg z_2| \neq \pi$ *tj.* $\frac{c}{a} \neq \frac{d}{b}$ *odnosno vektori* $\overrightarrow{Oz_1}$ *i* $\overrightarrow{Oz_2}$ *su nekolinearni.* $\left((\forall k \in \mathbb{R})\frac{z_1}{z_2} \neq k\right)$.

a) Odrediti kompleksne brojeve α *i* β, *koji nisu realni, takve da je* $z_3 = \alpha z_1 + \beta z_2$.

b) Odrediti realne brojeve α *i* β, *takve da je* $z_3 = \alpha z_1 + \beta z_2$, *gde zbog uslova* $\frac{c}{a} \neq \frac{d}{b}$ *par* (z_1, z_2) *jeste baza vektorskog prostora kompleksnih brojeva nad poljem realnih brojeva.*

Rešenje

$$a) \quad z_3 = iz_1 + (1 - i)z_2$$

$$b)\ z_3 = \frac{c^2+d^2-bd-ac}{ad-bc} z_1 + \frac{d(a-b)-c(a+b)+a^2+b^2}{ad-bc} z_2 \text{ ili}$$

$$z_3 = \frac{|z_2|^2 - R_e(\bar{z}_1 z_2)}{I_m(\bar{z}_1 z_2)} z_1 + \left(1 + \frac{|z_1|^2 - R_e(\bar{z}_1 z_2)}{I_m(\bar{z}_1 z_2)}\right) z_2.$$

Rezultat pod b) dobija se kada se u jednakost $z_3 = \alpha z_1 + \beta z_2$ *uvrste* $z_3 = iz_1 + (1 - i)z_2$, $z_1 = a + ib$ *i* $z_2 = c + id$, *izjednači realni deo s realnim delom i imaginarni deo s imaginarnim delom, pa se reši tako dobijen sistem linearnih jednačina po realnim nepoznatima* α *i* β.

Ako je $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$, *da li se tada može napisati* $z_3 = \alpha z_1 + \beta z_2$, *za neke* realne *brojeve* α *i* β *koji zavise od* a, b, c, d?

Da li to znači da u vektorskom prostoru $(\mathbb{C}, \mathbb{C}, +, \cdot)$ *kompleksnih brojeva, nad poljem kompleksnih brojeva, vektor* z_3 *ima dve različite reprezentacije preko njegove baze* (z_1, z_2), *što bi protivrečilo prethodnoj teoremi* 14.22 *!!! U čemu je greška?*

Teorema 14.24 *Uređena* n*-torka nenula vektora* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *prostora* V, $n \geq 2$ *zavisna je akko među njima postoji vektor jednak linearnoj kombinaciji* samo *njemu prethodnih vektora iz* $(a_1, \ldots, a_n)$.

Dokaz Dokazuje se samo smer $(\Rightarrow)$ jer je suprotan očevidno tačan. Kako je to n-torka nenula vektora, sledi da postoji najveći prirodni broj $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$ takav da je $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$ nezavisna, jer za $k = 2$ jeste nezavisna $(a_1 \neq 0)$, a možda je i za neko veće k. Dokazati sada da je vektor $a_k = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \ldots + \beta_{k-1} a_{k-1}$ za neke skalare $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{k-1}$. Neka je $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_{k-1} a_{k-1} + \alpha a_k = 0$. Tada je $\alpha = 0$ ili $\alpha \neq 0$. Slučaj $\alpha = 0$ nije moguć jer kako je $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$ nezavisna, onda bi i $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k)$ bila nezavisna, što je kontradiktorno činjenici da je k najveći prirodni broj s osobinom da je $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$ nezavisna. Kako je $\alpha \neq 0$, to iz $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_{k-1} a_{k-1} + \alpha a_k = 0$ sledi $a_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha} a_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha} a_2 - \ldots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha} a_{k-1}$.

Dokazati ovu teoremu i matematičkom indukcijom. Primećuje se da je dokaz indukcijom u suštini isto što i prethodni.

Teorema 14.25 *Neka je* $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *generatorna* n*-torka vektora prostora* V *i neka je* $a_1 \in V$, *tada je* $(a_1, b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *zavisna* $(n + 1)$*-torka vektora prostora* V.

Dokaz Kako je $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ generatorna n-torka vektora prostora V, to postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ takvi da je $a_1 = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_n b_n$, tj. $-a_1 + \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_n b_n = 0$, što znači da je $(a_1, b_1, b_2, \ldots, b_n)$ zavisna $(n+1)$-torka vektora prostora V.

Teorema 14.26 *Neka je n-torka vektora $A_1 = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ linearno nezavisna i neka je $B_1 = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ generatorna m-torka vektora prostora V. Tada je $n \leq m$.*

Dokaz Koristiće se teorema 14.25: ako se generatornoj n-torci doda neki vektor, dobija se zavisna $(n+1)$-torka. Sledstveno tome imamo da je $(a_1, b_1, b_2, \ldots, b_m)$ je zavisna. Na osnovu teoreme 14.24 sledi da postoji vektor iz $(m+1)$-torke $(a_1, b_1, b_2, \ldots, b_m)$ koji se može „izbaciti" a da su preostali i dalje generatorni. Neka je izbačeni vektor, na primer, b_1, što ne utiče na opštost dokaza (redosled vektora $b_1, b_2, \ldots, b_m$ u $(a_1, b_1, b_2, \ldots, b_m)$ nije bitan za teoremu koja se dokazuje). Znači, $B_2 = (a_1, b_2, \ldots, b_m)$ je generatorna. Sada se opet dodaje vektor a_2 generatornoj m-torci B_2 i dobija zavisna $(m+1)$-torka $(a_1, a_2, b_2, \ldots, b_m)$. Opet postoji vektor iz $(a_1, a_2, b_2, \ldots, b_m)$ koji se može „izbaciti" a da su preostali i dalje generatorni. Izbačeni vektor mora biti iz $m-1$-torke $(b_2, \ldots, b_m)$ jer su $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nezavisni. Neka je izbačeni vektor na primer b_2. Znači $B_3 = (a_1, a_2, b_3 \ldots, b_m)$ je generatorna. Sada je pitanje da li će se ovim postupkom prvo „potrošiti" vektori iz A_1 ili iz B_1, tj. da li je $n > m$ ili $n \leq m$? Ako bi bilo $n > m$, tada bi se u jednom koraku našeg postupka (algoritma) desilo da su u skupu B_i sve vektori iz A_1, a među njima postojao bi vektor jednak linearnoj kombinaciji prethodnih, što je nemoguće jer su vektori skupa A_1 (i, naravno, njegovih podskupova) nezavisni pa je $n \leq m$.

Teorema 14.27 *Proizvoljne dve baze $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ prostora V imaju isti broj vektora odnosno $n = m$.*

Dokaz Ako se $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ posmatraju kao nezavisne, a $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ kao generatorne, na osnovu teoreme 14.26 sledi da je $n \leq m$, a ako se sada $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ posmatraju kao generatorne, a $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ kao nezavisne, na osnovu teoreme 14.26 tada sledi da je $n \geq m$, pa dobijamo $n = m$.

Kako sve baze istog prostora V imaju isti broj vektora, to ima smisla sledeća definicija.

NEMA BAZU ≡ NIJE BROJIVA

Definicija 14.28 *Neka je $n \in \{1, 2, \ldots\}$ i neka je $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ baza prostora V. Tada je dimenzija vektorskog prostora V jednaka n, što se označava sa $\dim V = n$. Dimenzija prostora $(\{0\}, F, +, \cdot)$ je 0. U ovim slučajevima kaže se da su vektorski prostori konačno dimenzioni. Ako vektorski prostor V nije konačno dimenzioni, to se zapisuje kao $\dim V = \infty$ i kaže se da je V beskonačno dimenzionalni vektorski prostor.*

Znači, dimenzija dodeljuje svakom vektorskom prostoru nenegativan ceo broj ili ∞.

Na primer, prostor svih polinoma nad poljem realnih brojeva je beskonačno dimenzionalni i njegova jedna baza je recimo $(1, x, x^2, \ldots)$. Ova baza jeste prebrojiva. Postoje i vektorski prostori sa neprebrojivom bazom, na primer $(\mathbb{R}, \mathbb{Q}, +, \cdot)$ i 14.2.

? **Zadatak 14.29** *Da li su sledeće strukture vektorski prostori? Ako jesu, odrediti njihove dimenzije i bar jednu bazu:* a)$(\mathbb{C}, \mathbb{C}, +, \cdot)$, b)$(\mathbb{C}, \mathbb{R}, +, \cdot)$, c)$(\mathbb{C}, \mathbb{Q}, +, \cdot)$, d)$(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot)$, e)$(\mathbb{R}, \mathbb{Q}, +, \cdot)$, f)$(\mathbb{Q}, \mathbb{R}, +, \cdot)$, g)$\left(\{a + b\sqrt{2} | a \in \mathbb{Q} \wedge b \in \mathbb{Q}\}, \mathbb{Q}, +, \cdot\right)$, h)$(\mathbb{Q}, \mathbb{C}, +, \cdot)$. $= \infty$ DIM. !?

Videti 6.17 i 14.3

Teorema 14.30 *Ako je n-torka vektora prostora V nezavisna, tada je $n \leq \dim V$.*

Dokaz Posledica teoreme 14.26 i definicije 14.28.

Teorema 14.31 *Ako su $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ n-torka vektora prostora V i $n > dim(V)$, tada je $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ linearno zavisna n-torka, što znači da je baza prostora V uvek maksimalna nezavisna (videti* 14.20).

Dokaz Ako bi $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ bila linearno nezavisna, zbog teoreme 14.26 tada bi bilo $n \leq \dim V$, što je kontradikcija uslovu $n > \dim V$.

Teorema 14.32 *Nezavisna n-torka $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vektora prostora V dimenzije n jeste baza toga prostora.*

Dokaz Dokazati da je $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ generatorna n-torka prostora V. Za proizvoljni $x \in V$ važi da je $(a_1, a_2, \ldots, a_n, x)$ zavisna (teorema 14.31), a na osnovu 14.24 sledi da se x može napisati kao linearna kombinacija prethodnih $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, jer nijedan od vektora iz skupa $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ne može se napisati kao linearna kombinacija prethodnih pošto je $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nezavisna.

Teorema 14.33 *Generatorna n-torka vektora prostora V dimenzije n jeste baza toga prostora.*

Dokaz Dokazati da je $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nezavisna n-torka prostora V. Ako bi $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ bila zavisna, tada bi postojao pravi podskup od $k < n$ elemenata skupa $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, koji je takođe generatorni. Međutim, kako postoje nezavisna n-torka prostora V i generatorna k-torka prostora V, to zbog teoreme 14.26 sledi $k \geq n$, što je kontradikcija sa $k < n$.

Poslednje teoreme mogu se objediniti u sledećoj činjenici.

Činjenica 14.34

Ako je broj vektora jednak dimenziji prostora, tada su ti vektori baza, bilo da se dokaže samo njihova nezavisnost ili samo generatornost. Ako je broj vektora veći od dimenzije, vektori su uvek zavisni. Ako su vektori generatorni, njihov broj je veći ili jednak dimenziji prostora. Ako su vektori nezavisni, njihov broj je manji ili jednak dimenziji prostora. Ako su vektori zavisni, njihov broj je neodređen u odnosu na dimenziju.

Posledica 14.35 *Ako su prostori W i V iste dimenzije i ako je $W \subseteq V$, tada je $W = V$, jer proizvoljna baza postora W mora biti i baza prostora V.*

Definicija 14.36 *Skup od n različitih vektora $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ jeste baza nekog prostora akko je n-torka vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ baza toga prostora.*

Zadatak 14.37

Neka je V vektorski prostor generisan skupom vektora $\{a, b, c, d, e\}$, čije su **sve** *zavisnosti date sledećim sistemom i ~~njegovim linearnim kombinacijama:~~*

$$\begin{aligned} a + b - 15c + 10d - e &= 0 \\ 2a + b + 18c - 12d + e &= 0 \\ a \phantom{{}+b} + 33c - 22d + 2e &= 0 \end{aligned}$$

Precizno matematički to znači $\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \varepsilon e = 0 \Leftrightarrow$ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) \in L\Big((1, 1, -15, 10, -1), (2, 1, 18, -12, 1), (1, 0, 33, -22, 2)\Big)$ *tj. sistem od tri linearne zavisnosti vektora a, b, c, d, e, ekvivalentan je ovom beskonačnom sistemu linearnih zavisnosti vektora a, b, c, d, e!*

(a) *Odrediti dimenziju vektorskog prostora V.*

(b) *Naći sve podskupove skupa $S = \{a, b, c, d, e\}$ koji su baze prostora V.* **(c)** *Da li je $\{a, b, e\}$ baza prostora V?*

Rešenje

Dati sistem zavisnosti vektora je ekvivalentan sledećem sistemu zavisnosti:

$$\begin{aligned} a+b-\boxed{15c+10d}-\ \ e&=0\\ -b+\boxed{48c-32d}+3e&=0 \end{aligned}$$

odakle sledi da su vektori a i b nepotrebni u generisanju prostora V, pa $\{c,d,e\}$ je generatorna za V te je $\dim V \le 3$. Međutim, kako poslednji sistem reprezentuje **SVE** zavisnosti skupa vektora $S=\{a,b,c,d,e\}$, to je $\dim V = 3$, jer u protivnom bi poslednji sistem u tom trougaonom obliku morao imati **TRI** nezavisne jednakosti (zavisnosti), a on ima **DVE**, pa $\{c,d,e\}$ jeste baza prostora V.

Evo još jasnije objašnjenje. Očevidno je da $\{c,d,e\}$ jeste generatorni skup za prostor V i da bilo koja linearna kombinacija poslednjih dveju jednakosti **sadrži bar jedan od vektora** a, b. Nijedan **pravi** podskup skupa $\{c,d,e\}$ nije generatoran, jer bi se u protivnom dobila jednakost kao linearna kombinacija datih jednakosti, a **ne sadrži ni** a **ni** b, što je nemoguće. Znači, $\{c,d,e\}$ je minimalni skup generatora, odnosno baza prostora V.

Kako proveriti da li je $\{a,b,e\}$ baza prostora V? Komplement skupa $\{a,b,e\}$ u odnosu na skup S je $\{c,d\}$. Ako se elementi skupa $\{c,d\}$ mogu izraziti preko skupa vektora $\{a,b,e\}$, onda će to značiti da $\{a,b,e\}$ jeste baza. Drugim rečima, treba proveriti da li poslednji sistem vektorskih zavisnosti u kojem je skup nepoznatih $\{c,d\}$, jeste takav da se vektori $\{c,d\}$ mogu izraziti skupom vektora $\{a,b,e\}$ tj. da li je determinanta sistema $\begin{vmatrix} -15 & 10\\ 48 & -32\end{vmatrix}$ različita od nule ili jednaka nuli! Ako je različita od nule, onda će $\{a,b,e\}$ biti baza, u protivnom neće. Kako je $\begin{vmatrix} -15 & 10\\ 48 & -32\end{vmatrix} = 0$, to $\{a,b,e\}$ nije baza. Tako se dobija da $\{a,b,c\}$, $\{a,b,d\}$, $\{a,c,d\}$, $\{a,c,e\}$, $\{a,d,e\}$, $\{b,c,d\}$, $\{b,c,e\}$, $\{b,d,e\}$, $\{c,d,e\}$ jesu baze, a samo $\{a,b,e\}$ nije baza. Videti definiciju 14.17, gde stoji da je $\{a,b,e\}$ baza akko je i (a,b,e).

Uočiti razliku i sličnosti između sitema zavisnosti nekog skupa vektora i sistema linearnih jednačina nad nekim poljem!

Korisna napomena:

Neka dokazivanja u prostoru uređenih trojki realnih brojeva mnogo je lakše izvesti u prostoru slobodnih vektora što je dozvoljeno jer su oni izomorfni.

Poglavlje 15

LINEARNE TRANSFORMACIJE

Do sada su proučavani jedan vektorski prostor i objekti u njemu. Sada će se posmatrati dva vektorska prostora, V_1 i V_2, i funkcije koje preslikavaju V_1 u V_2, koje su saglasne s operacijama tih prostora. To znači sledeće: svejedno je da li se prvo saberu dva vektora pa zbir preslika funkcijom f ili se prvo svaki od tih vektora preslika istom tom funkcijom f pa se tek onda izvrši sabiranje. Takođe je svejedno da li se prvo pomnože skalar i vektor pa preslika funkcijom f ili se prvo preslika vektor sa funkcijom f pa skalar pomnoži dobijenim vektorom. Ovakve funkcije nazivaju se ***„linearne transformacije"*** ili ***„homomorfizmi"***. Evo i precizne matematičke definicije.

Definicija 15.1 *Neka su V_1 i V_2 vektorski prostori nad istim poljem F. Tada je funkcija $f : V_1 \to V_2$* ***„linearna transformacija"*** *ili* ***„homomorfizam"*** *ako su*

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b}) \quad i \quad f(\alpha\mathbf{a}) = \alpha f(\mathbf{a})$$

za sve $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ iz V_1 i sve α iz polja F.
Skup svih homomorfizama prostora V_1 u V_2 označava se sa $Hom(V_1, V_2)$.

Definicija 15.2 *Homotetija $H_{O,k}$ sa centrom u tački O i koeficijentom k, preslikava proizvoljnu tačku A u tačku A', tako da je $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$. Par tačaka (A, A') naziva se par odgovarajućih tačaka u homotetiji $H_{O,k}$.*

Definicija 15.3 *Funkcija f* OČUVAVA *homotetiju ako se par odgovarajućih tačaka A i A' u nekoj homotetiji preslikava u par odgovarajućih tačaka $f(A)$ i $f(A')$ u istoj toj homotetiji.*

Geometrijska interpretacija ili definicija LINEARNE TRANSFORMACIJE u euklidskom, geometrijskom vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ glasi:

Svaka linearna transformacija preslikava paralelogram na paralelogram i OČUVAVA svaku homotetiju čiji je centar u koordinatnom početku.

Obratno. Svaka funkcija $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ koja paralelogram preslikava na paralelogram i OČUVAVA svaku homotetiju čiji je centar u koordinatnom početku, jeste linearna transformacija.

Teorema 15.4 *Funkcija $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ je linearna transformacija akko f očuvava paralelnost i svaku homotetiju čiji je centar koordinatni početak $O(0,0,0)$.*

Napomena: U daljem tekstu oznake tačaka A i A' zamenjuju se oznakama njihovih vektora položaja $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$.

Dokaz Iz definicije homotetije sledi da je par tačaka (vektora položaja) $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ iz $\mathbb{R}^3$ par odgovarajućih tačaka u homotetiji $H_{O,\alpha}$ ako i samo ako je $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}$. Da li je i $f(\mathbf{b}) = \alpha f(\mathbf{a})$? Očevidno jeste akko je $f(\alpha\mathbf{a}) = \alpha f(\mathbf{a})$. Dakle, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ očuvava homotetiju $H_{O,\alpha}$ akko je $f(\alpha\mathbf{a}) = \alpha f(\mathbf{a})$. Znači, u svakom slučaju je $f(O) = O$.

Poznato je da su $O, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}+\mathbf{b}$ uvek temena paralelograma, u kome je $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ njegova dijagonala. Da li su onda uvek i $f(O), f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b}), f(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ temena paralelograma, gde je $f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b})$ njegova dijagonala? Dokazaće se da jesu akko je $f(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})$, jer je $f(O) = O$.
Pokazaće se da ako je f linearna i $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ paralelogram, tada je i $f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b}), f(\mathbf{c}), f(\mathbf{d})$ takođe paralelogram. Da bi bilo jasnije, uzeće se da je $\mathbf{a} = \vec{r}_A, \mathbf{b} = \vec{r}_B, \mathbf{c} = \vec{r}_C, \mathbf{d} = \vec{r}_D$. Kako je $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ paralelogram, to je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, tj. $\vec{r}_B - \vec{r}_A = \vec{r}_C - \vec{r}_D$. Ako je f linearna, tada iz $\vec{r}_B - \vec{r}_A = \vec{r}_C - \vec{r}_D$ sledi $f(\vec{r}_B - \vec{r}_A) =$

$f(\vec{r}_C - \vec{r}_D) \Leftrightarrow f(\vec{r}_B) - f(\vec{r}_A) = f(\vec{r}_C) - f(\vec{r}_D)$ odnosno $f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b}), f(\mathbf{c}), f(\mathbf{d})$ jeste paralelogram.

Pokazaće se sada da važi i obratno, tj. ako f održava paralelnost, tada je $f(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = f(\mathbf{a})+f(\mathbf{b})$. Ako se paralelogram uvek preslikava na paralelogram, onda je $f(O), f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b}), f(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ paralelogram, gde su $f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b})$ dijagonala. Kako je i $f(O), f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b}), f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})$ paralelogram, gde su $f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b})$ dijagonala i $f(O) = O$, sledi da je $f(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})$, zbog jedinstvenosti četvrtog temena D paralelograma $ABCD$ ako su data tri njegova temena ABC i podatak da je BC dijagonala.

VAŽNA NAPOMENA:

Za svaku teoremu i definiciju iz vektorskog prostora uvek uočiti i geometrijsku interpretaciju u $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$, jer sve postaje mnogo jasnije!

Ekvivalentna definicija linearne transformacije glasi:

Neka su V_1 i V_2 vektorski prostori nad istim poljem F. Tada se funkcija $f : V_1 \longrightarrow V_2$ obično naziva ***„linearna transformacija"*** *ili* ***„homomorfizam"*** *ako je*

$$f(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha f(\mathbf{a}) + \beta f(\mathbf{b})$$

za sve $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ iz V_1 i sve α i β iz polja F.

Primer 15.5 *Odrediti izraz za funkciju, kompoziciju $f \circ g$, ako su definicije funkcija $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ i $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ date izrazima:*
$f(x_1, x_2) = (ax_1+bx_2, cx_1+dx_2)$ i $g(x_1, x_2) = (px_1+qx_2, rx_1+sx_2)$, odnosno f i g određene su matricama $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$.

Videti 16.1.

Rešenje: $(f \circ g)(x_1, x_2) = f\big(g(x_1, x_2)\big) = f\,(px_1 + qx_2, rx_1 + sx_2) =$
$= \big(a(px_1 + qx_2) + b(rx_1 + sx_2)\,,\, c(px_1 + qx_2) + d(rx_1 + sx_2)\big) =$
$= (apx_1 + aqx_2 + brx_1 + bsx_2, cpx_1 + cqx_2 + drx_1 + dsx_2)=$
$= \big((ap + br)x_1 + (aq + bs)x_2, (cp + dr)x_1 + (cq + ds)x_2\big)$, odnosno
$f \circ g$ je određena matricom $\begin{bmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{bmatrix}$. Videti 16.2.

Da li ovo asocira na množenje matrica?

Primer 15.6 *Neka su funkcije $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ i $g, h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definisane izrazima $f(x_1, x_2) = (4x_1 - 5x_2, 2x_1 + 7x_2)$,*
$g(x_1, x_2, x_3) = (5x_1 + 6x_2 - 6x_3, -8x_1 - 11x_2 + 12x_3, -4x_1 - 6x_2 + 7x_3)$, i

$h(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}(-2x_2 - 2x_3, 2x_1 + x_3, 2x_1 - x_2)$.

a) Dokazati da su f, g *i* h *linearne transformacije.*

b) Odrediti $(f \circ f)(x_1, x_2)$ *i pokazati da je* $f \circ f$ *linearna transformacija.*

c) Odrediti $g(1, 1, 1)$ *i* $g(5, -7, -3)$.

d) Odrediti $(g \circ g)(x_1, x_2, x_3)$.

e) Odrediti $g^{-1}(x_1, x_2, x_3)$.

f) Odrediti $(\underbrace{g \circ g \circ \ldots \circ g}_{2009})(x_1, x_2, x_3) \stackrel{def}{=} g^{(2009)}(x_1, x_2, x_3)$.

g) Odrediti $h^{(2)} = h \circ h$ *i* $h^{(3)} = h \circ h \circ h$ *i pokazati da je* $h^{(3)} = -h$, $h^{(4)} = -h^{(2)}$, $h^{(5)} = h$, $h^{(4k \pm 1)} = \pm h$, $h^{(4k)} = -h^{(2)}$ *i* $h^{(4k+2)} = h^{(2)}$.

h) Da li među funkcijama $h, h^{(2)}, -h, -h^{(2)}$ *postoji identička funkcija?* $T(-h^{(2)})$

i) Da li je $\big(\{h, h^{(2)}, -h, -h^{(2)}\}, \circ\big)$ *grupoid i da li je grupa?* GRUPA

j) Da li je $\big(\{i_d, h, h^{(2)}, -h, -h^{(2)}\}, \circ\big)$ *asocijativni grupoid s neutralnim elementom i da li je grupa, gde je* i_d *identička funkcija?* $\perp$

k) Da li je $\big(\{h, h^{(2)}, -h, -h^{(2)}\}, \circ\big)$ *podgrupa od* $\big(\{f | f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\}, \circ\big)$? T

Rešenje

a) Kako su sada $\mathbf{a} = (x, y)$ i $\mathbf{b} = (u, v)$ vektori, to je

$$f(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = f\big(\alpha(x, y) + \beta(u, v)\big) = f\big((\alpha x, \alpha y) + (\beta u, \beta v)\big) =$$

$$= f(\alpha x + \beta u, \alpha y + \beta v) =$$

$$= \Big(4(\alpha x + \beta u) - 5(\alpha y + \beta v), 2(\alpha x + \beta u) + 7(\alpha y + \beta v)\Big) =$$

$$= (4\alpha x - 5\alpha y + 4\beta u - 5\beta v, 2\alpha x + 7\alpha y + 2\beta u + 7\beta v) =$$

$$= (4\alpha x - 5\alpha y, 2\alpha x + 7\alpha y) + (4\beta u - 5\beta v, 2\beta u + 7\beta v) =$$

$$= \alpha(4x - 5y, 2x + 7y) + \beta(4u - 5v, 2u + 7v) =$$

$$= \alpha f(x, y) + \beta f(u, v) = \alpha f(\mathbf{a}) + \beta f(\mathbf{b}).$$

Analogno se dokazuje i za funkcije g i h.

b) $(f \circ f)(x_1, x_2) = (6x_1 - 55x_2, 22x_1 + 39x_2)$, pa je linearna analogno dokazu pod a).

c) $g(1, 1, 1) = (5, -7, -3), g(5, -7, -3) = (1, 1, 1)$.

d) $(g \circ g)(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$ tj. $g \circ g = i_d$ je identička funkcija.

e) $g^{-1} = g$ f) $g^{(2009)} = (g \circ g)^{(1004)} \circ g = i_d \circ g = g$, tj. g je involucija.

g) $h^{(2)}(x_1, x_2, x_3) = (h \circ h)(x_1, x_2, x_3) = h\big(h(x_1, x_2, x_3)\big) =$
$= \frac{1}{9}(-8x_1 + 2x_2 - 2x_3, 2x_1 - 5x_2 - 4x_3, -2x_1 - 4x_2 - 5x_3)$.

$$
\begin{aligned}
h^{(3)}(x_1,x_2,x_3) &= (h^{(2)}\circ h)(x_1,x_2,x_3) = h^{(2)}\big(h(x_1,x_2,x_3)\big) = \\
&= \tfrac{1}{27}(18x_2+18x_3,-18x_1-9x_3,-18x_1+9x_2) = \\
&= -\tfrac{1}{3}(-2x_2-2x_3,2x_1+x_3,2x_1-x_2) = (-h)(x_1,x_2,x_3).
\end{aligned}
$$

$h^{(4)} = h^{(3)}\circ h = -h\circ h = -h^{(2)}$.

$h^{(5)} = h^{(4)}\circ h = -h^{(2)}\circ h = -h^{(3)} = h^{(1)} = h$.

Uraditi prethodne primere pomoću matrica!

Uskoro će biti dokazano da je svaka linearna transformacija $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ oblika $f(x_1,x_2)=(ax_1+bx_2,cx_1+dx_2)$, gde su a, b, c, $d\in\mathbb{R}$.

Analogno primeru 15.6a dokazuje se da važi sledeća teorema.

Teorema 15.7 *Funkcija* $f{:}\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ *definisana sa* $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=$ $=(a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n,a_{21}x_1+\ldots+a_{2n}x_n,\ldots,a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n)$ *jeste linearna transformacija.*

Malo kasnije biće dokazano da važi:

Svaka linearna transformacija $f{:}\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ ima oblik $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ $=(a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n,a_{21}x_1+\ldots+a_{2n}x_n,\ldots,a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n)$.

Primer 15.8 *Funkcije* $\mathbf{pr}_{\vec{a}}(\vec{x})$ *i* $\mathbf{pr}_{\pi}(\vec{x})$ *su linearne transformacije. Prva preslikava vektorski prostor svih slobodnih vektora u vektorski prostor* $\big(\{\phi\vec{a}|\phi\in\mathbb{R}\},\mathbb{R},+,\cdot\big)$, *za svaki nenula vektor* $\vec{a}$, *druga preslikava vektorski prostor svih slobodnih vektora u vektorski prostor* $\big(\{\phi\vec{a}+\psi\vec{b}|\phi,\psi\in\mathbb{R}\},\mathbb{R},+,\cdot\big)$, *za svaka dva nekolinearna (linearno nezavisna) vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$, *koji su paralelni sa ravni* π.
(videti 12.20, 12.24, 12.23 *i* 12.34 *)*

Neposredna posledica definicije linearne transformacije:

Teorema 15.9 *Ako je* f *linearna transformacija, tada je* $f(0)=0$.

Dokaz: Kako je $f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$ za sve skalare α i β, to se uzimanjem $\alpha=\beta=0$ dobija tvrđenje teoreme.

Ako je $f(x)=0$ da li mora biti $x=0$?

(Odgovor: Samo ako je f injektivna. Zašto?)

Dokazati matematičkom indukcijom sledeću teoremu.

Teorema 15.10 *Za svaku linearnu transformaciju f i za svaki prirodni broj n važi*

$$f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n) = \alpha_1 f(a_1) + \alpha_2 f(a_2) + \ldots + \alpha_n f(a_n).$$

Test 15.11 *Neka je $f : V \to W$ linearna transformacija, gde su V i W nad poljem F. Zaokružiti slova ispred tačnih iskaza.* **a)** $f(0) = 0$,
b) $(\forall x \in V) f(-x) = -x$, **c)** $(\forall x \in V)(\forall \lambda \in F) f(\lambda x) = f(\lambda) + f(x)$,
d) $(\forall x \in V) x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$, **e)** $(\forall x, y \in V) f(x - y) = f(x) - f(y)$.

Definicija 15.12 *Neka su V_1 i V_2 vektorski prostori nad poljem F. Tada su sabiranje funkcija iz skupa $\mathcal{F} = \{f | f : V_1 \to V_2\}$ i množenje skalara polja F i funkcije iz $\mathcal{F}$ definisani kao*

$$(\forall x \in V_1)(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ i } (\forall x \in V_1)(\forall \lambda \in F)(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

SKUP SVIH LINEARNIH TRANSF.

Teorema 15.13 *Uređena četvorka $(Hom(V_1, V_2), F, +, \cdot)$ jeste vektorski prostor, gde su $+$ i $\cdot$ binarne operacije iz prethodne definicije.*

Dokaz Prvo treba proveriti da li je $f + g \in Hom(V_1, V_2)$ ako su f i g iz $Hom(V_1, V_2)$, odnosno da li je zbir dva homomorfizma opet homomorfizam. Kako je

$$(f+g)(\alpha x+\beta y) = f(\alpha x+\beta y)+g(\alpha x+\beta y) = \alpha f(x)+\beta f(y)+\alpha g(x)+\beta g(y)$$

$$= \alpha(f(x) + g(x)) + \beta(f(y) + g(y)) = \alpha(f + g)(x) + \beta(f + g)(y),$$

to je $f+g \in Hom(V_1, V_2)$. Znači, $(Hom(V_1, V_2), +)$ jeste grupoid, a pokazaće se da je i Abelova grupa.

Asocijativnost operacije $+$ jednostavno se proverava po definiciji te operacije.

Neutralni element je funkcija $\mathcal{O} : V_1 \to V_2$ koja je definisana sa $\mathcal{O}(x) = 0$. Naravno treba proveriti da li je $\mathcal{O} \in Hom(V_1, V_2)$, tj. da li je $\mathcal{O}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{O}(x) + \beta \mathcal{O}(y)$ za sve x i y iz V_1 i sve α i β iz F. Ta jednakost je tačna jer je uvek ekvivalentna sa 0=0.

Pre ispitivanja postojanja inverznog elementa, pokazaće se da je λf homomorfizam za sve $\lambda \in F$ i sve $f \in Hom(V_1, V_2)$. Kako je

$$(\lambda f)(\alpha x + \beta y) = \lambda f(\alpha x + \beta y) = \lambda(\alpha f(x) + \beta f(y)) =$$

$$= \alpha(\lambda f(x)) + \beta(\lambda f(y)) = \alpha(\lambda f)(x) + \beta(\lambda f)(y),\ tj.\ \lambda f \in Hom(V_1, V_2).$$

Kako se inverzni element za f u odnosu na sabiranje u svakom vektorskom prostoru obeležava sa $-f$, to treba dokazati da za svaki $f \in Hom(V_1, V_2)$ postoji $-f \in Hom(V_1, V_2)$ takav da za svako $x \in V_1$ važi $(f + (-f))(x) = \mathcal{O}(x)$ tj. $f+(-f) = \mathcal{O}$. Dokazati da traženi homomorfizam $-f$ jeste $-f = (-1)f$. Pokazano je da je $\lambda f \in Hom(V_1, V_2)$ za sve $\lambda \in F$ i sve $f \in Hom(V_1, V_2)$, pa je onda i $-f = (-1)f \in Hom(V_1, V_2)$, što znači da ostaje još samo dokazivanje da je $f + (-f) = \mathcal{O}$, što sledi iz

$$(f + (-1)f)(x) = f(x) + ((-1)f)(x) = f(x) + (-1)f(x) =$$

$$= f(x) - (1 \cdot f(x)) = f(x) - f(x) = 0 = \mathcal{O}(x).$$

Komutativnost operacije $+$ očevidna je iz definicije.

Dokazaće se još druga aksioma vektorskih prostora, to jest aksioma $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$. Kako je za svako x iz V_1:

$$(\alpha(f + g))(x) = \alpha(f + g)(x) = \alpha(f(x) + g(x)) = \alpha f(x) + \alpha g(x) =$$

$$= (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x) = (\alpha f + \alpha g)(x),$$

to je $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$.

Preostale tri aksiome analogno se proveravaju po definicijama operacija $+$ i $\cdot$ i definiciji homomorfizma. □

Teorema 15.14 *Uređena trojka $(Hom(V), +, \circ)$ jeste prsten, gde je operacija $+$ sabiranje homomorfizama, a $\circ$ kompozicije funkcija.*

Dokaz Videti 8.29. U prethodnoj teoremi pokazano je i da je uređen par $(Hom(V), +)$ Abelova grupa, a poznato je da je operacija kompozicije funkcija asocijativna. Preostalo je da se dokaže da je $f \circ g \in Hom(V)$ za sve f i g iz $Hom(V)$ i da važi zakon distributivnosti.

Neka su f i g iz $Hom(V)$. Tada je

$$(f \circ g)(\alpha x + \beta y) = f(g(\alpha x + \beta y)) = f(\alpha g(x) + \beta g(y)) =$$

$$= \alpha f(g(x)) + \beta f(g(y)) = \alpha(f \circ g)(x) + \beta(f \circ g)(y),$$

što znači da je $f \circ g \in Hom(V)$. Dokazati sad distributivnost. Kako je za svako x iz V

$$(f \circ (g + h))(x) = f((g + h)(x)) = f(g(x) + h(x)) =$$

T.J. ∀ LT JE ODREĐENA SLIKAMA SVOJE BAZE

$$= f(g(x)) + f(h(x)) = (f \circ g)(x) + (f \circ h)(x) = (f \circ g + f \circ h)(x),$$

to je $f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h$ (Napomena: U svakom prstenu podrazumeva se da druga operacija, to je ovde $\circ$, ima prednost nad prvom, to je ovde $+$, što u pisanju smanjuje broj neophodnih zagrada). □

Teorema 15.15 *(Osnovni stav linearne algebre) Neka su V_1 i V_2 vektorski prostori nad poljem F i neka je $(a_1, \ldots, a_n)$ baza prostora V_1.*

Tada je za svaku n-torku vektora $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in V_2^n$ jednoznačno određena linearna transformacija $f : V_1 \to V_2$ za koju je $f(a_i) = b_i$, za sve $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Dokaz Dokazaće se prvo ***jedinstvenost*** takve linearne transformacije. Pretpostavimo da postoje takve dve linearne transformacije f, i g, za koje je $f(a_i) = g(a_i) = b_i$. Sada za proizvoljan vektor $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n \in V_1$ jeste $f(x) = f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n) = \alpha_1 f(a_1) + \alpha_2 f(a_2) + \ldots + \alpha_n f(a_n) = \alpha_1 g(a_1) + \alpha_2 g(a_2) + \ldots + \alpha_n g(a_n) =$
$= g(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n) = g(x)$, što znači da je $f = g$.

Dokazati ***postojanje*** takve linearne transformacije f. Funkcija $f : V_1 \to V_2$ definisaće se na sledeći način:

$$f(x) = f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_n b_n$$

za proizvoljni $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n \in V_1$. Jednostavno se proverava (dokažite sami!) da ovako definisana funkcija f jeste linearna transformacija, čime je dokaz završen. □

Još jedna formulacija teoreme 15.15

Linearna transformacija $f : V_1 \longrightarrow V_2$ određena je slikama bilo koje baze iz V_1.

Definicija 15.16 *Izomorfizam je bijektivna linearna transformacija. Za vektorske prostore V_1 i V_2 kaže se da su izomorfni ako postoji bar jedan izomorfizam $f : V_1 \to V_2$. Ako su prostori V_1 i V_2 izomorfni, to se označava sa $V_1 \cong V_2$ ili $V_1 \simeq V_2$.*

Linearna transformacija linearno zavisnu n-torku vektora preslikava u linearno zavisnu n-torku.

Dokaz je vrlo jednostavan. Dokažite sami!

Svaka injektivna linearna transformacija nezavisnu n-torku, preslikava u nezavisnu n-torku.

Prvi deo dokaza sadržan je u teoremi 15.17

Ako linearna transformacija svaku nezavisnu n-torku vektora preslikava u nezavisnu n-torku vektora, tada je f injektivna odnosno monomorfizam.

Treći deo dokaza je u teoremi 15.17.

Teorema 15.17 *Neka su V_1 i V_2 vektorski prostori nad poljem F, neka je n-torka vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ baza prostora V_1 i neka je funkcija $f: V_1 \to V_2$ linearna transformacija.*

Tada f jeste izomorfizam, ako i samo ako uređena n-torka vektora $\big(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)\big)$ jeste baza prostora V_2.

Dokaz $(\Rightarrow)$ Neka je f izomorfizam.

(I) Dokazati nezavisnost n-torke $\big(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)\big)$
Iz $\alpha_1 f(a_1) + \alpha_2 f(a_2) + \ldots + \alpha_n f(a_n) = 0$, zbog linearnosti sledi da je $f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n) = 0$, a zbog injektivnosti i zbog $f(0) = 0$ sledi $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n = 0$. Zbog nezavisnosti n-torke $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sada je $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ tj. $\big(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)\big)$ nezavisna je n-torka prostora V_2.

(II) Dokazati sada da je $\big(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)\big)$ i generatorna. Uzeti proizvoljni vektor y iz V_2. Tada zbog sirjektivnosti funkcije f postoji $x \in V_1$ takav da je $f(x) = y$. Kako je $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ baza prostora V_1, to postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$ takvi da je $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n$. Zbog linearnosti funkcije f odavde sledi $y = f(x) = \alpha_1 f(a_1) + \alpha_2 f(a_2) + \ldots + \alpha_n f(a_n)$, što znači da je svaki element y prostora V_2 linearna kombinacija vektora n-torke $\big(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)\big)$.

$(\Leftarrow)$ Neka je $\big(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)\big)$ baza prostora V_2.

(III) Dokazati injektivnost funkcije f.

Iz $f(x) = f(y)$ odnosno $f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n) =$
$= f(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \ldots + \beta_n a_n)$, zbog linearnosti sledi da je

$$(\alpha_1 - \beta_1) f(a_1) + (\alpha_2 - \beta_2) f(a_2) + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) f(a_n) = 0,$$

a zbog nezavisnosti n-torke $\big(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)\big)$ sledi da je $\alpha_1 - \beta_1 = 0$, $\alpha_2 - \beta_2 = 0, \ldots, \alpha_n - \beta_n = 0$, to jest $x = y$, što znači da je f injektivna.

(IV) Dokazati sada sirjektivnost funkcije f. Kako je n-torka vektora $\big(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)\big)$ i generatorna, to za svaki $y \in V_2$ postoje skalari $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ takvi da je $y = \lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2) + \ldots + \lambda_n f(a_n)$. Neka je $x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$. Tada je, zbog linearnosti $f(x) = \lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2) + \ldots + \lambda_n f(a_n) = y$, odnosno f je sirjektivna, jer je dokazano da za svako $y \in V_2$ postoji $x \in V_1$ tako da je $f(x) = y$.

Linearna transformacija je izomorfizam ako i samo ako bazu preslikava na bazu.

Teorema 15.18 *Svaka dva vektorska prostora nad istim poljem F jesu izomorfna akko su istih dimenzija.*

Dokaz je neposredna posledica teorema 15.17 i 15.15.

Primer 15.19 *Vektorski prostori* $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ *i* $(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}, +, \cdot)$ *su jednodimenzionalni, pa kako su istih dimenzija, po teoremi 15.18 oni su izomorfni. To znači da postoji bijekcija između* $\mathbb{Q}$ *i* $\mathbb{R}$, *a poznato je da ne postoji bijekcija između* $\mathbb{Q}$ *i* $\mathbb{R}$! *u čemu je greška?*

Odgovor: JER NISU NAD ISTIM POLJEM

Teorema 15.20 Svaki n-dimenzionalni vektorski prostor $(V, F, +, \cdot)$ izomorfan je vektorskom prostoru uređenih n-torki $(F^n, F, +, \cdot)$. Taj izomorfizam naziva se kanonički izomorfizam. *Sledi iz 15.18.*

Poglavlje 16

MATRICE I LINEARNE TRANSFORMACIJE

Sledi upoznavanje matrica i dokazivanje izomorfnosti nekih struktura linearnih transformacija sa strukturama matrica. Često se kaže da je matrica formata mn pravougaona shema brojeva, tj. elemenata nekog polja, ili uređena mn-torka elemenata nekoga polja. Sledi definicija matrice.

Definicija 16.1 *Matrica formata mn nad poljem F jeste funkcija M_{mn} (piše se još i $M_{m\times n}$ ili $M_{m,n}$) koja preslikava skup svih uređenih parova $\Big\{(i,j)|i \in \{1,2,\dots,m\} \wedge j \in \{1,2,\dots,n\}\Big\}$ u skup F. Skup svih matrica formata mn označavaće se sa $\mathcal{M}_{mn}$. Matrice formata nn, to jest matrice koje imaju isti broj vrsta i kolona, nazvaće se kvadratne matrice reda n.*

Na primer, matrica $M_{2,3}$ je funkcija definisana sa $M_{2,3}=$

$$= \Big\{\big((1,1),7\big),\ \big((1,2),4\big),\ \big((1,3),9\big),\ \big((2,1),3\big),\ \big((2,2),0\big),\ \big((2,3),8\big)\Big\}$$

$$= \begin{pmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (2,1) & (2,2) & (2,3) \\ 7 & 4 & 9 & 3 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 9 \\ 3 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Poslednji zapis je najpregledniji pa će se zato najčešće i koristiti.

Mogući način zapisivanja matrice formata mn:

$$M_{m\times n} = M^{m\times n} = M_{m,n} = M^{m,n} = [a_{ij}]^{m,n} =$$

$$= M_{mn} = [a_{ij}]_{mn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ako je $[a_{ij}]_{mn}$ matrica nad poljem F, tada se element a_{ij} polja F naziva element matrice $[a_{ij}]_{mn}$, koji je u i-toj vrsti i j-toj koloni matrice.

Elementi $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ matrice $[a_{ij}]_{mn}$ formata mn, nazivaju se elementi i-te vrste, elementi $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$ matrice $[a_{ij}]_{mn}$ elementi j-te kolone dok su elementi $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{kk}$ matrice $[a_{ij}]_{mn}$ elementi glavne dijagonale, gde je $k = min\{m, n\}$. U oznaci $[a_{ij}]_{mn}$ broj m je fiksan prirodni broj koji govori da promenljiva i uzima vrednosti iz skupa $\{1, 2, \dots, m\}$ i broj n je fiksan prirodni broj koji ukazuje da promenljiva j uzima vrednosti iz skupa $\{1, 2, \dots, n\}$.

Matrica čiji svi elamenti su nule, zove se **nula matrica**.

Matrica čiji elemnti glavne dijagonale su jedinice, a ostali elementi nule, zove se **jedinična matrica**.

Transponovana matrica $A^\top$ od neke matrice A se dobija kada odgovarajuće vrste i kolone zamene mesta.

Definicija 16.2 *Zbir istotipnih matrica, formata mn, nad poljem F definiše se kao*

$$[a_{ij}]_{mn} + [b_{ij}]_{mn} = [a_{ij} + b_{ij}]_{mn},$$

množenje skalara $\lambda \in F$ i matrice $[a_{ij}]_{mn}$ definiše se sa

$$\lambda[a_{ij}]_{mn} = [\lambda a_{ij}]_{mn}$$

i proizvod matrica $[a_{ij}]_{mk}$ i $[b_{ij}]_{kn}$ definiše se kao

$$[a_{ij}]_{mk}[b_{ij}]_{kn} = [a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}]_{mn} = [c_{ij}]_{mn} \text{ gde je } c_{ij} = \sum_{p=1}^{k} a_{ip}b_{pj}$$

uz dodatak (proširenje) da za svaku matricu A važi

$$(\forall\lambda \in F) \;\; [\lambda]\cdot A \overset{def}{=} \lambda\cdot A = \lambda\, A = A\,\lambda = A\cdot[\lambda].$$

Videti primer 15.5 i definicije 17.35 i 17.36.

Matrice A i B mogu se pomnožiti samo ako je broj kolona matrice A jednak broju vrsta matrice B, odnosno $A_{mk}B_{kn} = C_{mn}$.

Primeri

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix}$$

Istotipne matrice sabiraju se tako što se odgovarajući elementi saberu.

$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \end{bmatrix}$$

Prema tome, skalar (broj) množi se matricom tako što se skalar ili broj pomnoži svakim elementom matrice.

Matrica A_{mn} i B_{pq} može se pomnožiti samo ako je $n = p$, na primer

$$A_{33}B_{33} = [a_{ij}]_{33}[b_{ij}]_{33} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{bmatrix}$$

Element c_{ij} na mestu (i, j) u proizvodu $A_{mk}B_{kn}$ matrica A_{mk} i B_{kn} dobija se pomoću i-te vrste matrice A_{mk} i j-te kolone matrice B_{kn}, i to tako što se odgovarajući elementi te vrste i kolone pomnože i svi proizvodi saberu, odnosno $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}$.

Definicija 16.3 *Svaki vektor* $a_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi}) \in \mathbb{R}^m$ *zapisuje se kao matrica kolona ili* $a_i \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}$ *a matrica* $[a_{ij}]_{mn}$ *zapisuje se*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} a_1 \,|\, a_2 \,|\, \cdots \,|\, a_n \end{bmatrix}$$

i na osnovu 10.9 sledi da je $a_i^\top = [a_{1i}\ a_{2i}\ \ldots\ a_{ni}]$.

Dakle , $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k} = (x_1, x_2, x_3) \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x = [x_1\, x_2\, x_3]^\top$.

Svaka matrica kolona a_i i svaka kolona matrice M_{mn} jesu vektor iz prostora $\mathbb{R}^m$, to jest uređena m-torka realnih brojeva.

U sledećoj teoremi koristimo kraj definicije 16.2 koja kaže $[\lambda] \stackrel{def}{=} \lambda$

Teorema 16.4 *Za svake tri matrice kolone a, b, c istoga formata važi:*

$$(a^\top b)c = (ca^\top)b.$$

Dokaz *Dokazaćemo se za formate* 2×1, *jer se ništa ne gubi na opštosti.*

$$(a^\top b)c = \left([a_1\, a_2]\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = (a_1b_1 + a_2b_2)\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1c_1 + a_2b_2c_1 \\ a_1b_1c_2 + a_2b_2c_2 \end{bmatrix}$$

$$(ca^\top)b = \left(\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}[a_1\, a_2]\right)\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1c_1 & a_2c_1 \\ a_1c_2 & a_2c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1c_1 + a_2b_2c_1 \\ a_1b_1c_2 + a_2b_2c_2 \end{bmatrix}$$

Na osnovu 16.3, 16.4, 10.9, 12.20 i 12.26 sledi da je $P = \frac{a_i \cdot a_i^\top}{a_i^\top \cdot a_i} = \frac{a_i a_i^\top}{a_i^\top a_i}$ kvadratna matrica reda n, ranga 1 i za koju važi $P^2 = P$, tj. idempotentna je i projektuje na pravac vektora a_i.

Proizvod $a_i^\top \cdot a_i = a_i^\top a_i$ kvadratna je matrica reda 1, odnosno jedan obični skalar (broj), koji se naziva skalarni proizvod vektora a_i sa vektorom a_i ili kvadrat intenziteta vektora a_i ili kvadrat norme vektora a_i u oznaci $||a_i||^2$ ili $|a_i|^2$ (videti 16.6), to jest postoji definicija skalarnog proizvoda vektora:

Definicija 16.5 *Skalarni proizvod vektora je funkcija koja uređen par vektora* $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ *i* $b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$ *preslikava u proizvod matrice vrste* $a^\top$ *i matrice kolone* b, *odnosno u broj* $a^\top b = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n$. *Kada je matrica A realna (tj. $a_{ij} \in \mathbb{R}$), tada se $A^\top$ označava i sa A^*,*[1] *pa je*

$$a^* b = a^\top b = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n.$$

Vektori a i b su normalni akko je njihov skalarni proizvod jednak nuli.

Videti 16.3, 10.9 i 12.19.

Definicija 16.6 *Norma ili intenzitet vektora* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$ *(videti 12.32) iz prostora* $\mathbb{R}^m$ *jeste realni broj* $||\alpha||$ *definisan sa* $||\alpha|| = \sqrt{\alpha^\top \alpha} = \sqrt{\alpha^* \alpha} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_m^2}$ *12.48.*

---

[1] $A = [a_{ij}]_{mn} \Rightarrow A^* = [\overline{a_{ij}}]_{mn}^\top$. Matrica A^* dobija se od matrice A konjugovanjem svih elemenata matrice A i zatim transponovanjem.

Vektor je jedinični akko je njegova norma jednaka 1. Ugao između vektora (matrica kolona) a i b u oznaci $\measuredangle(a,b)$ *iznosi*

$$\measuredangle(a,b) = \arccos\frac{a^*b}{||a||\cdot||b||} = \arccos\frac{a^\top b}{||a||\cdot||b||}.$$

Zadatak 16.7 *Ako su* a *i* b *vektori kolone iz* $M_{mn} = [a_{ij}]_{mn}$, *dokazati da je tada* $(a^\top b)a = (aa^\top)b$ *odnosno* $(a^*b)a = (aa^*)b$, *jer ako je* $a_{ij} \in \mathbb{R}$, *tada je* $a^* = a^\top$.

Definicija 16.8 *Neka* n*-torka vektora* $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ *ortonormirana je akko su svaka dva međusobno normalna i ako su jedinični.*

Kako će se dalje raditi samo s realnim skalarima, to će uvek biti $a^* = a^\top$.

Definicija 16.9 *Projekcija vektora* x *na pravac vektora* a *jeste vektor* $P_a(x) = \frac{a^\top x}{a^\top a}a$, *a zbog* 16.4 *sledi* $P_a x = \frac{aa^\top}{a^\top a}x$. *Ako je* q *jedinični vektor, tada je* $P_q x = (qq^\top)x = (q^\top x)q$.

Na osnovu 16.3, 16.4, 10.9, 12.20 i 12.26 sledi da je $P = \frac{a_i\cdot a_i^\top}{a_i^\top\cdot a_i} = \frac{a_i a_i^\top}{a_i^\top a_i}$ kvadratna matrica reda n, ranga 1 i za koju važi $P^2 = P$, to jest idempotentna je i projektuje na pravac vektora a_i.

Teorema 16.10 *Za svaki vektor* x *važi da je* $x - P_a(x)$ *normalan na vektor* a.

Znači, $P_a = \frac{aa^*}{a^*a}$ je linearna transformacija ili matrica ranga 1 koja pomnožena proizvoljnim vektorom (matricom kolonom s desne strane) daje njegovu projekciju na pravac vektora a.

Teorema 16.11 *Neka su* $\alpha : \vec{n}\vec{r} = 0$ *ravan i* $a : \vec{r} = t\vec{a}$ *prava.* **Kosa projekcija** *vektora* $\vec{x}$ *na ravan* α *u pravcu prave* a *(vekora* $\vec{a}$*) jeste vektor* $f(\vec{x})$ *koji je određen sa (videti* 16.3, 16.4 *i* 13.15)

$f(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{\vec{n}\vec{x}}{\vec{n}\vec{a}}\vec{a}$ *ili matričnim računom* $f(x) = x - \frac{n^\top x}{n^\top a}a = x - \frac{an^\top}{n^\top a}x = \boxed{(I - \frac{an^\top}{n^\top a})x = f(x)}$

gde su n, a *i* x *matrice kolone, dok je* $\boxed{I - \frac{an^\top}{n^\top a}}$ *matrica linearne transformacije* f.

Teorema 16.12 *Neka su* $\alpha : \vec{n}\vec{r} = 0$ *ravan i* $a : \vec{r} = t\vec{a}$ *prava.* **Kosa projekcija** *vektora* $\vec{x}$ *na pravu* a *„u pravcu ravni* α*" (ili paralelno sa rvni* α*) jeste vektor* $g(\vec{x})$ *koji je određen sa*

$$g(\vec{x}) = \vec{x} - f(x) = \vec{x} - (\vec{x} - \frac{\vec{n}\vec{x}}{\vec{n}\vec{a}}\vec{a}) = \frac{\vec{n}\vec{x}}{\vec{n}\vec{a}}\vec{a} \text{ (videti 16.3, 16.4, 13.14 i 13.13.)}$$

Matričnim računom to je $g(x) = \frac{n^\top x}{n^\top a}a = \boxed{\frac{an^\top}{n^\top a}x = g(x)}$

gde su n, a *i* x *matrice kolone, dok je* $\boxed{\frac{an^\top}{n^\top a}}$ *matrica linearne transformacije* g.

Teorema 16.13 *Matrice* $P_1 = I - \frac{an^\top}{n^\top a}$ *i* $P_2 = \frac{an^\top}{n^\top a}$ *jesu* idempotntne tj. projektori, *odnosno važi* $P_1^2 = P_1$ *i* $P_2^2 = P_2$, *dok matrice* $F_1 = 2P_1 - I$ *i* $F_2 = 2P_2 - I$ *jesu involutorne tj. reflektori, odnosno važi* $F_1^2 = I$ *i* $F_2^2 = I$, *gde su* a *i* n **proizvoljne matrice kolone istoga formata.**

Teorema 16.14 *Ako je* P *kosa projekcija, bilo na pravac bilo na ravan, tada je* $F = 2P - I$ *kosa simetrija, gde je* I *identička funkcija ili jedinična matrica. Jasno je da važi* $P^2 = P$ *i* $F^2 = I$. *Matrica* P *je matrica linearne transformacije* f *ili* g *iz 16.11 i 16.12.*

Zadatak 16.15 *Odrediti matrice kose ravanske simetrije i kose osne simetrije zavisno od matrica kolona (vektora) a i n u vektorskom prostoru* $\mathbb{R}^3$. *Prava i ravan određene redom kao a i n moraju da sadrže* $O(0,0,0)$ *zbog potrebnog uslova za linearnu transformaciju* $f(0)=0$.

Ako su u pitanju simetrije i projekcije slobodnih vektora, sledi da prava i ravan ne moraju da sadrže $O(0,0,0)$, *jer tada je svaka tačka nula vektor!*

Rešenje *Na osnovu 16.11, 16.12 i 16.14 sledi da je matrica kose simetrije u odnosu na pravu „u pravcu ravni"* $\boxed{2\frac{an^{\top}}{n^{\top}a}-I}$, *a matrica kose simetrije u odnosu na ravan u pravcu prave je* $\boxed{I-2\frac{an^{\top}}{n^{\top}a}}$, *gde je n vektor normale ravni, dok je a vektor prave.*

Teorema 16.16 *Ako je* $\sphericalangle(\vec{n}_\alpha,\vec{n}_\beta)=\varphi$, *tada je* $A=BC=(I-\frac{2}{n_\alpha^{\top}n_\alpha}n_\alpha n_\alpha^{\top})(I-\frac{2}{n_\beta^{\top}n_\beta}n_\beta n_\beta^{\top})$ *matrica rotacije oko presečnice ravni* α *i* β *za ugao* 2φ, *a matrice B i C su matrice ravanskih simetrija redom u odnosu na ravni* α *i* β *koje sadrže koordinatni početak i njihovi vektori normala su redom* $n_\alpha=\vec{n}_\alpha$ *i* $n_\beta=\vec{n}_\beta$, *odnosno* n_α *i* n_β *su matrice kolone.*

Kako se ne može izvesti direktno uopštenje (geometrijsko) definicije 12.23, to se može videti njena ekvivalentna definicija (teorema) 12.34. Evo toga uopštenja:

Definicija 16.17 *Ako je* $(q_1,q_2,\dots,q_n)$ *ortonormirana n-torka prostora* $(\mathbb{R}^m,\mathbb{R},+,\cdot)$, *tada (videti 12.34)* $P(x)=Px=(q_1^*x)q_1+(q_2^*x)q_2+\ldots+(q_n^*x)q_n=\sum_{i=1}^{n}(q_i^*x)q_i=\sum_{i=1}^{n}(q_iq_i^*)x$ *jeste projekcija vektora x na vektorski potprostor generisan n-torkom vektora* $(q_1,q_2,\dots,q_n)$.

Teorema 16.18 *Ako je* $(q_1,q_2,\dots,q_m)$ *ortonormirana* **baza** *prostora* $(\mathbb{R}^m,\mathbb{R},+,\cdot)$) *tada za svako* $x\in\mathbb{R}^m$ *(videti 12.35):* $P(x)=Px=x=(q_1^*x)q_1+(q_2^*x)q_2+\ldots+(q_m^*x)q_m=$ $=\sum_{i=1}^{m}(q_i^*x)q_i=\sum_{i=1}^{m}(q_iq_i^*)x$ *odnosno P je identička funkcija.*

Ova teorema je uopštenje teoreme koja kaže da ako tačka pripada ravni, onda je njena projekcija na tu ravan jednaka njoj samoj.

Teorema 16.19 *Za svaki vektor* $x\in\mathbb{R}^m$ *i svaku ortonormiranu n-torka* $(q_1,q_2,\dots,q_n)$ *prostora* $(\mathbb{R}^m,\mathbb{R},+,\cdot)$ *važi da je vektor (videti 12.34 i 12.22)*
$r=x-\sum_{i=1}^{n}(q_iq_i^*)x=x-\sum_{i=1}^{n}(q_i^*x)q_i$ *normalan na svaki* q_i *za sve* $i\in\{1,\dots,n\}$.

Teorema 16.20 *Za svaki vektor* $x\in\mathbb{R}^m$ *postoji vektor r, takav da je x na jedinstven način predstavljiv linearnom kombinacijom* $n+1$ *– torke vektora* $(r,q_1,q_2,\dots,q_n)$, *odnosno važi da je* $x=r+\sum_{i=1}^{n}(q_i^*x)q_i$, *gde je* $(q_1,q_2,\dots,q_n)$ *data ortonormirana n-torka, gde je* $n<m$.

Gram-Šmitov postupak ortogonalizacije nezavisne n-torke vektora neposredna je posledica teorema 16.19 i 16.20:

Teorema 16.21 *Gram-Šmitov algoritam. Neka je* $(a_1,\dots,a_n)$ *nezavisna,* $(q_1,\dots,q_n)$ *ortonormirana i neka je* $<a_1,\dots,a_i>=<q_1,\dots,q_i>$ *za svako* $i\in\{1,\dots,n\}$. *Tada je*
$q_1=\pm\frac{a_1}{||a_1||}$ *i* $q_i=\pm\frac{a_i-(q_1^*a_i)q_1-(q_2^*a_i)q_2-\ldots-(q_{i-1}^*a_i)q_{i-1}}{||a_i-(q_1^*a_i)q_1-(q_2^*a_i)q_2-\ldots-(q_{i-1}^*a_i)q_{i-1}||}$. *Videti 12.37.*

U primeru $n=3$ ima $2^3=8$ takvih ortonormiranih trojki (triedara) koji reprezentuju 8 oktanata.

Zadatak 16.22 *Neka su* $a=\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}=(a_1,a_2,a_3)$ *i* $x=\vec{x}=x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k}=(x_1,x_2,x_3)$ *slobodni vektori ali i vektori prostora* $(\mathbb{R}^3,\mathbb{R},+,\cdot)$, *a zbog* 16.3 *i* 16.5 *oni su i matrice kolone* $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ *i* $a=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$, *pa je* $a^*=a^{\top}=[a_1\ a_2\ a_3]$. *Tada dokazati sledeće:*

a) *Matričnim množenjem pokazuje se da je* $(aa^*)x = (a^*x)a$, *što znači da je* $P(x) = \frac{a^*x}{a^*a}a = \frac{aa^*}{a^*a}x = Px$. *Videti* 13.18 *i* 12.20.

b) $P = \frac{aa^*}{a^*a}$ *je matrica čija linearna transformaija svaki vektor* $x = (x_1, x_2, x_3)$ *preslikava na njegovu normalnu (ortogonalnu) projekciju na pravu koja prolazi kroz koordinatni početak i paralelna je sa vektorom* $a = \vec{a}$ *to jest na pravu čija je jednačina* $\vec{r} = t\vec{a}$, *odnosno* $P(x) = Px = \frac{aa^*}{a^*a}x$. *Videti* 13.18 *i* 12.20.

c) *Matrica* P *je idempotentna tj. projektor, odnosno važi* $P^2 = P$.

d) *Matrica* $F = 2P - I$ *je involutorna (reflektor), odnosno važi* $F^2 = I$, *gde je* I *jedinična matrica. Linearna transformacija* F *je osna simetrija, čija je osa paralelna sa vektorom* $a = \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} = (a_1, a_2, a_3)$, *to jest* $a^\top = [a_1\, a_2\, a_3]$ *i pripada joj koordinatni početak*

$$F(x,y,z) = F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \left(2\frac{aa^\top}{a^\top a} - I\right)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \text{gde je } a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

Primer: $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{j} = (1,1,1)$ *i* $(x,y,z) = (1,2,3)$. *Rešenje* $F(1,2,3) = (3,2,1)$.

e) *Matrica* $I - P$ *je idempotentna tj. projektor, odnosno važi da je* $(I - P)^2 = I - P$. *Linearna transformacija* $I - P$ *je projekcija na ravan koja je normalna na vektor* $a = \vec{a}$.

f) *Matrica* $F_1 = -F = I - 2P$ *je involutorna (reflektor), odnosno važi* $F_1^2 = I$. *Linearna transformacija* F_1 *je ravanska simetrija, u odnosu na ravan koja je normalna na vektor* $a = \vec{a}$ *i pripada joj koordinatni početak.*

Svaka linearna transformacija za koju je $P^2 = P$ naziva se projektor, a za koju je $F^2 = I$ zove se reflektor, ali ne mora svaka biti ortogonalna kao ove iz prethodnog zadatka i prethodnih teorema.

Videti 10.9, 12.20, 13.18 i 16.3. To znači da je algebra slobodnih vektora, u stvari, algebra matrica, gde je $a^* = a^\top$ matrica vrsta nastala transponovanjem matrice kolone a.

Teorema 16.23 *Ako je* P *projektor* (*videti* 16.22, 12.20, 12.27, 12.34), *tada* $F = 2P - I$ *jeste involutorna linearna transformacija, tj. matrica za koju važi* $F^2 = I$ *odnosno* $F^{-1} = F$, *gde je* I *jedinična matrica. Takve matrice ili linearne transformacije* F *nazivaju se i reflektori. Ako je* P *ortogonalan, tada je* F *ili ravanska simetrija ili osna simetrija u euklidskom (običnom geometrijskom) prostoru* $\mathbb{R}^3$, *u zavisnosti od toga da li je* P *projektovanje na ravan ili pravu koje, naravno, sadrže koordinatni početak.*

Teorema 16.24 *Linearna transformacija* F *jeste involutorna ako i samo ako je reflektor, to jest ako je oblika* $F = 2P - I$, *gde je* P *neki projektor odnosno linearna transformacija za koju važi* $P^2 = P$. *U euklidskom (običnom geometrijskom) prostoru* $\mathbb{R}^3$ *to su ravanske simetrije (kose simetrije), gde za original* A *i sliku* A' *važi da duž* AA' *ne mora biti normalna na ravan, već obrazuje neki fiksni ugao sa ravni. Analogno i osne simetrije.*

Može li se dati uopštenje definicije vektorskog proizvoda slobodnih vektora za prostor $\mathbb{R}^n$, analogno uopštenju skalarnoga proizvoda 16.5. Videti 12.44 i 16.6.

Iz prethodnog se vidi da sva izračunavanja u analitičkoj geometriji, koja se vrše preko vektora, mogu da se rade i matričnim računom.

Definicija 16.25 *Kako su svaka dva vektorska prostora nad istim poljem izomorfna akko imaju iste dimenzije 15.18, to znači da je svaki vektorski prostor $(V, F, +, \cdot)$ dimenzije n izomorfan vektorskom prostoru $(F^n, F, +, \cdot)$. Izomorfizam prethodnih prostora određen je fiksiranjem neke proizvoljne baze $(a_1, \dots, a_n)$ prostora $(V, F, +, \cdot)$, pa se zato obično označava sa $\varphi_{(a_1,\dots,a_n)} : F^n \longrightarrow V$ i definisan je kao*

$$\varphi_{(a_1,\dots,a_n)}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n.$$

Izomorfizam $\varphi_{(a_1,\dots,a_n)} : F^n \rightarrow V$ naziva se KANONIČKI izomorfizam.

Definicija 16.26 *Neka je $f : V_1 \longrightarrow V_2$ linearna transformacija vektorskog prostora V_1 u vektorski prostor V_2, oba nad istim poljem F, i neka je (a_1, a_2, a_3) baza od V_1 a (b_1, b_2) baza od V_2. Ako je linearna transformacija $f : V_1 \longrightarrow V_2$ data sa slikama svoje baze (a_1, a_2, a_3):*

$$\star \quad \begin{array}{rl} f(a_1) = & \alpha b_1 \ +\beta b_2 \\ f(a_2) = & \gamma b_1 \ +\delta b_2 \\ f(a_3) = & \phi b_1 \ +\psi b_2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f(a_1) \\ f(a_2) \\ f(a_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \\ \phi & \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

tada se matrica $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \\ \phi & \psi \end{bmatrix}^{\top} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & \phi \\ \beta & \delta & \psi \end{bmatrix}$ *naziva matrica linearne transformacije f i, po dogovoru, koristi se i oznaka $A = f$.*

Prema tome, linearna transformacija $f : V_1 \longrightarrow V_2$ definisana je (data) ako su date baze (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2) i skalari matrice $\begin{bmatrix} \alpha & \gamma & \phi \\ \beta & \delta & \psi \end{bmatrix}$.

Jasno je da linearna transformacija f iz prethodne definicije jeste jednoznačno određena (data) sa slikama baze (a_1, a_2, a_3) (videti $\star$ 16.26 i 15.15), jer za proizvoljni $x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$ iz V_1 važi da je

$$\begin{aligned} f(x) = f(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3) &= \lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2) + \lambda_3 f(a_3) = \\ &= \lambda_1(\alpha b_1 + \beta b_2) + \lambda_2(\gamma b_1 + \delta b_2) + \lambda_3(\phi b_1 + \psi b_2) \\ &(\lambda_1 \alpha + \lambda_2 \gamma + \lambda_3 \phi) b_1 + (\lambda_1 \beta + \lambda_2 \delta + \lambda_3 \psi) b_2. \end{aligned}$$

Znači, dobija se da je

$$f(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3) = \big(\alpha\lambda_1 + \gamma\lambda_2 + \phi\lambda_3\big) b_1 + \big(\beta\lambda_1 + \delta\lambda_2 + \psi\lambda_3\big) b_2,$$

a ako su baze (a_1, a_2, a_3) i (b_1, b_2) fiksirane, zbog kanoničkih izomorfizama, odgovarajućih njima, prethodna jednakost tada se može zapisati (videti komentar u sledećem pasusu)

$$f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\alpha\lambda_1 + \gamma\lambda_2 + \phi\lambda_3, \beta\lambda_1 + \delta\lambda_2 + \psi\lambda_3) \quad ili$$

$$f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & \phi \\ \beta & \delta & \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Strogo uzevši nije se smelo pisati $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, već je trebalo $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = \varphi_{(a_1,a_2,a_3)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, ali to se piše u smislu kraće oznake. Kraće označavanje logično je zato što je $\varphi_{(a_1,a_2,a_3)}$ izomorfizam. Dalje će se govoriti da koordinate vektora $x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$ u bazi $B = (a_1, a_2, a_3)$ jesu $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ i pisati $x = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)_B$, a ako se baza B podrazumeva, pisaće se samo $x = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Podsetimo da je to već urađeno kod slobodnih vektora i pisano je $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z)_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})} = (x, y, z)$.

Evo još jedne ekvivalentne definicije matrice linearne transformacije. Na primeru koji ne umanjuje opštost jer je svaki vektorski prostor izomorfan sa $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ za neko $n \in \mathbb{N}$ pa je dovoljno proučavati samo linearne transformacije $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Teorema 16.27 *Ako je $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definisana kao*

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1 + \gamma x_2 + \phi x_3, \beta x_1 + \delta x_2 + \psi x_3) = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & \phi \\ \beta & \delta & \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

tada matrica te linearne transformacije f u odnosu na standardne baze jeste $A = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & \phi \\ \beta & \delta & \psi \end{bmatrix}$. *Često se i sama linearna transformacija f obeležava simbolom njene matrice A odnosno $A = f$.*

Dokaz Ako se uzme redom $(x_1, x_2, x_3) \in \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, dobija se $f(1,0,0) = (\alpha, \beta)$, $f(0,1,0) = (\gamma, \delta)$ i $f(1,0,0) = (\phi, \psi)$ ili

$$\begin{matrix} f(1,0,0) = & \alpha(1,0) & +\beta(0,1) \\ f(0,1,0) = & \gamma(1,0) & +\delta(0,1) \\ f(0,0,1) = & \phi(1,0) & +\psi(0,1) \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} f(1,0,0) \\ f(0,1,0) \\ f(0,0,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \\ \phi & \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1,0) \\ (0,1) \end{bmatrix}$$

Sada iz definicije 16.26 sledi tvrdnja teoreme.

Analogno primeru 15.6a dokazuje se da važi teorema:

n = KOLONA ; VRSTA = m

Teorema 16.28 *Funkcija* $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *definisana sa* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$
$= (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n, \ldots, a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n)$ *jeste linearna transformacija.*

Teorema 16.29 *Neka je* $\big((\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}),(\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32}),(\alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{33})\big)$ *baza vektorskog prostora* $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ *i neka su matrica* A*, matrica* B *i linearna transformacija* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *date sa*

$$\begin{array}{l} f(\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}) = (\beta_{11}, \beta_{21}, \beta_{31}) \\ f(\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32}) = (\beta_{12}, \beta_{22}, \beta_{32}), \\ f(\alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{33}) = (\beta_{13}, \beta_{23}, \beta_{33}) \end{array} \quad A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix}$$

Tada matrica M *linearne transformacije* f *u standardnoj bazi glasi*

$$\boxed{M = BA^{-1}}$$

Test 16.30 *Odrediti matrice sledećih linearnih transformacija:*

$$\begin{array}{l} f(1,0) = (1,3) \\ f(0,1) = (2,4) \end{array}, \quad \begin{array}{l} g(1,0) = (1,2) \\ g(0,1) = (2,4) \end{array}, \quad \begin{array}{l} h(2,1) = (1,0) \\ h(5,3) = (0,1) \end{array}, \quad \begin{array}{l} F(1,1) = (1,2) \\ F(2,4) = (2,4) \end{array}$$

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad M_g = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \quad M_h = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad M_F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorema 16.31 *Svaka linearna transformacija* f *iz skupa svih transformacija* $\mathcal{L}_{22} = \{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid f \text{ je linearna transformacija}\}$ *ima oblik* $f(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)$*, gde su* a, b, c *i* d *neki realni brojevi, koji su jednoznačno određeni za datu linearnu transformaciju* f.
Time je faktički linearnoj transformaciji f *jednoznačno pridružena matrica* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *iz skupa matrica* $\mathcal{M}_{22} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$
i svakoj matrici $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *jednoznačno odgovara linearna transformacija* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definisana sa* $f(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)$.

Napomena: $\mathcal{L}_{nm} = Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Dokaz Neka je f neka proizvoljna linearna transformacija iz $\mathcal{L}_{22}$ i neka se vektori $(1,0)$ i $(0,1)$ preslikavaju sa f redom u vektore (a,c) i (b,d) odnosno $f(1,0) = (a,c)$ i $f(0,1) = (b,d)$, čime je zbog teoreme 15.15 linearna transformacija f jednoznačno određena. Sada zbog linearnosti funkcije

f sledi $f(x_1, x_2) = f\big(x_1(1,0) + x_2(0,1)\big) = x_1 f(1,0) + x_2 f(0,1) = x_1(a,c) + x_2(b,d) = (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)$.

Očevidno je da važi uopštenje za m i n odnosno

Svaka linearna transformacija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ima oblik $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n, \ldots, a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n)$.

Ovom teoremom (16.31) konstruisana je bijekcija $\psi : \mathcal{M}_{22} \to \mathcal{L}_{22}$.

Zbog toga je uobičajeno da se umesto $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ piše $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, gde je A matrica odgovarajuća linearnoj transformaciji f.

Sada će se pokazati da ova funkcija ψ ne samo što je bijekcija već je i izomorfizam algebarskih struktura matrica i (algebarskih struktura) linearnih transformacija!

Teorema 16.32 *Neka je* $\mathcal{M}_{22} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ *i neka je skup transformacija* $\mathcal{L}_{22} = \{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid f$ *je linearna transformacija*$\}$. *Tada za funkciju* $\psi : \mathcal{M}_{22} \to \mathcal{L}_{22}$ *definisanu sa* $\psi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = f$, *gde je* $\psi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)(x_1, x_2) =$
$f(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)$, *važi:*

a) ψ *je bijekcija* ,

b) $(\forall A, B \in \mathcal{M}_{22}) \quad \psi(A \cdot B) = \psi(A) \circ \psi(B)$

c) $(\forall A, B \in \mathcal{M}_{22}) \quad \psi(A + B) = \psi(A) + \psi(B)$

d) $(\forall A \in \mathcal{M}_{22})(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \quad \psi(\lambda A) = \lambda\psi(A)$ *gde su* $\circ$ *i* $+$ *operacije kompozicije i sabiranja u skupu linearnih transformacija, a* $\cdot$ *i* $+$ *operacije množenja i sabiranja matrica, i* $\lambda \cdot A = \lambda A$ *množenje skalara i matrice dok je* $\lambda \cdot \psi(A) = \lambda\psi(A) = \lambda f$ *množenje skalara i linearne transformacije. Znači, koristi se konvencija o brisanju simbola operacije* $\cdot$ *odnosno množenja skalara i matrice, kao i množenja skalara i linearne transformacije. Operacije* $+$ *pod c) su različite!*

Dokaz

a) Dokazano je teoremom 16.31.

b) Neka su linearne transformacije f i g definisane izrazima $f(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)$, $g(x_1, x_2) = (px_1 + qx_2, rx_1 + sx_2)$. Po definiciji bijektivne funkcije ψ tada sledi da postoje matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ takve da je $\psi(A) = f$ i $\psi(B) = g$. Sada sledi da je $(\psi(A) \circ$

$\psi(B)\big)(x_1,x_2) =$
$= (f\circ g)(x_1,x_2) = f\big(g(x_1,x_2)\big) = f(px_1+qx_2, rx_1+sx_2) =$
$= \big(a(px_1+qx_2)+b(rx_1+sx_2), c(px_1+qx_2)+d(rx_1+sx_2)\big) =$
$= (apx_1+aqx_2+brx_1+bsx_2), cpx_1+cqx_2+drx_1+dsx_2) =$
$= \Big((ap+br)x_1+(aq+bs)x_2, (cp+dr)x_1+(cq+ds)x_2\Big) =$
$= \psi\left(\begin{bmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds\end{bmatrix}\right)(x_1,x_2) = \psi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} p & q \\ r & s\end{bmatrix}\right)(x_1,x_2) =$
$= \psi(A\cdot B)(x_1,x_2).$

Kako je $\big(\psi(A)\circ\psi(B)\big)(x_1,x_2) = \psi(A\cdot B)(x_1,x_2)$ za svaki par $(x_1,x_2)\in \mathbb{R}^2$, to je $\boxed{\psi(A)\circ\psi(B) = \psi(A\cdot B)}$. Videti teoremu 3.23.

Sada je jasno da je množenje matrica definisano onako kako je i definisano da bi u izomorfizmu ψ množenju matrica odgovarala kompozicija linearnih transformacija! Drugim rečima, ekvivalentna definicija množenja matrica glasi:

$$A\cdot B = \psi^{-1}\big(\psi(A)\circ\psi(B)\big)$$

c) $\big(\psi(A)+\psi(B)\big)(x_1,x_2) =$
$= (f+g)(x_1,x_2) = (ax_1+bx_2, cx_1+dx_2)+(px_1+qx_2, rx_1+sx_2) =$
$=(ax_1+bx_2+px_1+qx_2, cx_1+dx_2+rx_1+sx_2) =$
$=\big((a+p)x_1+(b+q)x_2, (c+r)x_1+(d+s)x_2\big) = \psi\left(\begin{bmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s\end{bmatrix}\right)(x_1,x_2) =$
$= \psi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} p & q \\ r & s\end{bmatrix}\right)(x_1,x_2) = \psi(A+B)(x_1,x_2).$

Kako je $\big(\psi(A)+\psi(B)\big)(x_1,x_2) = \psi(A+B)(x_1,x_2)$ za svaki par $(x_1,x_2)\in \mathbb{R}$, to je $\boxed{\psi(A)+\psi(B) = \psi(A+B)}$. Videti teoremu 3.23.

d)
$\psi(\lambda A)(x_1,x_2) = \psi\left(\lambda\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}\right)(x_1,x_2) = \psi\left(\begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d\end{bmatrix}\right)(x_1,x_2) = =$
$(\lambda ax_1+\lambda bx_2, \lambda cx_1+\lambda dx_2) = \lambda(ax_1+bx_2, cx_1+dx_2) =$
$= \lambda\psi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}\right)(x_1,x_2) = \lambda\psi(A)(x_1,x_2) = \Big(\lambda\psi(A)\Big)(x_1,x_2).$

Kako je $\psi(\lambda A)(x_1,x_2) = \Big(\lambda\psi(A)\Big)(x_1,x_2)$ za svaki par (x_1,x_2) iz skupa $\mathbb{R}^2$, to je $\boxed{\psi(\lambda A) = \lambda\psi(A)}$. Videti teoremu 3.23.

Teorema 16.33 *Funkcija* ψ *iz teoreme* 16.32 *jeste izomorfizam prstena linearnih transformacija* $(\mathcal{L}_{nn},+,\circ)$ *i strukture matrica* $(\mathcal{M}_{nn},+,\cdot)$, *što znači* *daje i* $(\mathcal{M}_{nn}, +, \cdot)$ *prsten i* ψ *je izomorfizam vektorskih prostora* $(\mathcal{L}_{nm}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ *i* $(\mathcal{M}_{mn}, \mathbb{R}, +, \cdot)$.

Na osnovu ove teoreme sledi da iz asocijativnosti kompozicije linearnih transformacija sledi asocijativnost množenja matrica.

Napomena: $\mathcal{L}_{nm} = Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Ako je $\psi(A) = f$, tada se za matricu A kaže da je matrica odgovarajuća linearnoj transformaciji f.

Važna napomena! Skalar λ u prethodnom nizu jednakosti množi se sa matricama, skalarima, vektorima (n-torkama) i linearnim transformacijama. To su sve različite operacije množenja (multiplikativne)!

Jasno je da dokaz nimalo ne gubi na opštosti, što je dokazivano za $m = n = 2$, jer važi za sve prirodne brojeve m i n. Sve izloženo važi za svako polje F iako je zbog jasnoće rađeno za polje realnih brojeva.

Zbog izomorfizama dokazanih u prethodnoj teoremi, često se u radu, u cilju kraćeg zapisivanja i sporazumevanja, „poistovećuje" matrica A sa njoj odgovarajućom linearnom transformacijom $f = \psi(A)$ pa se umesto f piše A, ali strogo uzevši to su različiti matematički objekti. **Dakle, $Ax = A(x) = f(x)$ i Ax je množenje kvadratne matrice A matricom kolonom x, dok $A(x)$ je slika originala x funkcijom (linearnom transformacijom) A**

Kako su struktura matrica i struktura linearnih transformacija izomorfne, to sledi da svi zakoni koji koje smo dokazali za linearne transformacije,važe iza matrice. To znači da na primer asocijativnost množenja matrica ne moramo dokazivati, jer je kompozicija linearnih transformacija asocijativna.

Zadatak 16.34 *Neka su linearne transformacije f i g definisane sa* $f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, x_1 + 3x_2)$ *i* $g(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 2x_1 + x_2)$.

a) Po definiciji kompozicije $\circ$ odrediti $(f \circ g)(x_1, x_2) = f\big(g(x_1, x_2)\big)$.

b) Napisati matrice M_f i M_g koje su odgovarajuće linearnim transformacijama f i g odnosno $M_f = \psi^{-1}(f)$ *i* $M_g = \psi^{-1}(g)$.

c) Izračunati proizvod matrica $M_f \cdot M_g$.

d) Napisati linearnu transformaciju $h(x_1, x_2)$ kojoj odgovara matrica $M_f \cdot M_g = \psi^{-1}(h)$.

e) Da li je $h = f \circ g$ ili da li je $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})\ h(x_1, x_2) = (f \circ g)(x_1, x_2)$?

I za testove i za zadatke posebno su važni sledeći primeri, definicije i teoreme:

15.5, 15.6, 15.13, 15.14, 15.15, 15.16, 15.17, 16.25, 16.26, 16.27, 16.31, 16.32, 16.34.

Zadatak 16.35 *Odrediti sledeće linearne transformacije ravni xOy to jest prostora $\mathbb{R}^2$ u obliku $f(x,y) = (ax+by, cx+dy)$, gde su a, b, c, d realni brojevi i odrediti njima inverzne linearne transformacije:*

a) *Osna simetrija σ_θ oko ose ℓ koja prolazi kroz koordinatni početak O i s pozitivnom x-osom obrazuje ugao $\frac{\theta}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.*

b) *Rotacija ρ_θ oko koordinatnog početka O za ugao $\theta \in (-\pi, \pi]$.*

c) *Centralna simetrija σ_O u odnosu na koordinatni početak O.*

Rešenje Korišćenjem kompleksnih brojeva lako se dobija:

a) $\sigma_\theta(x,y) = (x\cos\theta + y\sin\theta, x\sin\theta - y\cos\theta)$ i $\sigma_\theta^{-1} = \sigma_\theta$. Koristiti:

$\sigma_\theta(z) = \overline{z}e^{i\theta} = \overline{(x+iy)}(\cos\theta + i\sin\theta) = x\cos\theta + y\sin\theta + i(x\sin\theta - y\cos\theta)$. Videti 7.44

b) $\rho_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$ i $\rho_\theta^{-1} = \rho_{-\theta}$.

Koristiti: $\rho_\theta(x+iy) = (x+iy)(\cos\theta + i\sin\theta) = x\cos\theta - y\sin\theta + i(x\sin\theta + y\cos\theta)$. Videti 7.26

c) $\sigma_O(x,y) = (-x,-y)$ i $\sigma_O^{-1} = \sigma_O$.

Matrice ovih linearnih transformacija su:

$$\sigma_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}, \rho_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \sigma_O = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 16.36 *Da li $(A \cup B, \circ)$ jeste grupa linearnih transformacija prostora $\mathbb{R}^2$, gde su $A = \{\sigma_\theta | \theta \in (-\pi, \pi]\}$, $B = \{\rho_\theta | \theta \in (-\pi, \pi]\}$, operacija $\circ$ kompozicija funkcija i σ_θ i ρ_θ definisanih u zadatku* 16.35?

Uputstvo: Ispitati da li $\sigma_{\theta_1} \circ \sigma_{\theta_2}$, $\sigma_{\theta_1} \circ \rho_{\theta_2}$, $\rho_{\theta_1} \circ \sigma_{\theta_2}$ i $\rho_{\theta_1} \circ \rho_{\theta_2}$ pripadaju skupu $A \cup B$ za svako θ_1 i θ_2 iz $\mathbb{R}$ ili iz $(-\pi, \pi]$, potpuno je svejedno. Zašto? Može se raditi i u matričnom obliku.

Zadatak 16.37 *Napisati izraze za linearne transformacije f_1, f_2, f_3 koje su ravanske simetrije redom u odnosu na ravni $x = y$, $x = z$ i $y = z$. Naći sve linearne transformacije koje se mogu dobiti kompozicijom funkcija f_1, f_2, f_3 i napisati Kejlijevu tablicu kompozicije svih tih linearnih transformacija. Da li one obrazuju grupu? Kako glasi geometrijska interpretacija ostalih linearnih transformacija?*

Rezultat $f_1(x,y,z)=(y,x,z)$, $f_2(x,y,z)=(z,y,x)$, $f_3(x,y,z)=(x,z,y)$,
$f_4(x,y,z)=(f_1\circ f_2)(x,y,z)=f_1(z,y,x)=(y,z,x)$, rotacija oko prave $x=y=z$ za ugao 120°
$f_5(x,y,z)=(f_1\circ f_3)(x,y,z)=f_1(x,z,y)=(z,x,y)$, rotacija oko prave $x=y=z$ za ugao 240°
$f_0(x,y,z)=(f_4\circ f_5)(x,y,z)=f_4(z,x,y)=(x,y,z)$. $\big(\{f_0,f_1,f_2,f_3,f_4,f_5\},\circ\big)$ jeste grupa.
To su transformacije podudarnsti koje jednakostraničan trougao A(1,1,-2),B(1,-2,1),C(-2,1,1) preslikavaju u smog sebe. Koji se sve trouglovi sa f_0,f_1,f_2,f_3,f_4,f_5 preslikavaju u sami sebe?

Teorema 16.38 *Neka je V vektorski prostor nad poljem F i neka je $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ baza prostora V. Tada je funkcija*

$$\varphi_{(a_1,a_2,\ldots,a_n)}: F^n \longrightarrow V \qquad \textit{definisana sa}$$

$$\varphi_{(a_1,a_2,\ldots,a_n)}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)=\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\ldots+\lambda_na_n$$

izomorfizam prostora F^n i prostora V, koji će se nazvati ***kanonički izomorfizam.***

Dokaz se, zbog svoje jednostavnosti, ostavlja čitaocu.

Definicija 16.39 *Neka je funkcija $f: V_1 \longrightarrow V_2$ linearna transformacija prostora V_1 u prostor V_2 i neka su $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ i $(b_1,b_2,\ldots,b_m)$ redom baze tih prostora. Tada se matrica A određena linearnom transformacijom $f_A=\psi(A)$*

$$f_A=\varphi^{-1}_{(b_1,b_2,\ldots,b_m)}\circ f\circ\varphi_{(a_1,a_2,\ldots,a_n)}: F^n \longrightarrow F^m$$

naziva matrica odgovarajuća homomorfizmu f, u odnosu na te izabrane baze. Na osnovu usvojene konvencije, umesto f_A pisaće se samo A, jer homomorfizmu f_A jednoznačno odgovara matrica A.

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "f"] & V_2 \\
F^n \arrow[u, "\varphi_{(a_1,\ldots,a_n)}", "\cong"'] \arrow[r, "A"] & F^m \arrow[u, "\varphi_{(b_1,\ldots,b_m)}"', "\cong"]
\end{tikzcd}$$

Drugim rečima, svaka linearna transformacija $f\in Hom(V_1,V_2)$ jednaka je linearnoj transformaciji

$$f=\varphi_{(b_1,b_2,\ldots,b_m)}\circ A\circ\varphi^{-1}_{(a_1,a_2,\ldots,a_n)},$$

gde su $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ neke baze redom prostora V_1 i V_2, dok je A linearna transformacija odgovarajuća matrici $A \in \mathcal{M}_{mn}$.

Dvojno značenje simbola A (matrica ili linearna transformacija), neće stvarati zabunu jer će iz konteksta uvek biti jasno da li je reč o matrici ili o njoj odgovarajućoj linearnoj transformaciji. Sigurno već imate iskustava s dvostrukim i višestrukim značenjem simbola (oznaka), kao što se, simbolom $+$ označavaju razne binarne operacije: sabiranje homomorfizama, sabiranje matrica, sabiranje u polju F itd.

Na primer, ako se za matrice $A, B \in \mathcal{M}_{mn}$ posmatra linearna transformacija (određena sa $A + B$!) $A + B : F^n \longrightarrow F^m$, pitanje je da li je to linearna transformacija koja odgovara zbiru matrica $A + B$ ili zbir linearnih preslikavanja koja redom odgovaraju matricama A i B to jest $A : F^n \longrightarrow F^m$ i $B : F^n \longrightarrow F^m$? Kao što je dokazano teoremom 16.32, nije bitno jer u oba slučaja to je jedno isto preslikavanje, pa nema opasnosti od zabune.

Isto tako, ako se za matrice $A, B \in \mathcal{M}_{nn}$ posmatra linearna transformacija (određena sa $A \cdot B$!) $A \cdot B : F^n \longrightarrow F^n$, pitanje je da li je to linearna transformacija koja odgovara proizvodu matrica $A \cdot B$ ili kompozicija (neki kompoziciju $\circ$ zovu proizvod i pišu $\cdot$ umesto $\circ$) linearnih preslikavanja koja redom odgovaraju matricama A i B, odnosno $A : F^n \longrightarrow F^n$ i $B : F^n \longrightarrow F^n$? Kao što je dokazano teoremom 16.32 ili 16.33 nije bitno jer u oba slučaja to je jedno istovetno preslikavanje, pa nema opasnosti od zabune. Videti primer 16.34.

Isto važi i za λA, $\lambda \in F$.

Iz teoreme 16.32 sledi da za operaciju množenja matrica važe zakoni asocijativnosti i distributivnosti množenja matrica u odnosu na sabiranje matrica, jer je algebarska struktura matrica izomorfna prstenu linearnih transformacija, pa onda i struktura matrica mora biti prsten. Komutativnost za množenje kvadratnih matrica ne važi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Struktura $(Hom(V), \circ)$ očevidno je polugrupa s neutralnim elementom, jer za kompoziciju funkcija važi zakon asocijativnosti a neutralni element je identička funkcija, odnosno funkcija skupa V u skup V koja sve elemente preslikava u same sebe, a ona očevidno jeste homomorfizam.

Ta struktura nije grupa jer funkcije iz $(Hom(V), \circ)$ nisu sve bijektivne, pa nema svaka sebi inverznu funkciju.

Ali ako se uzme da je $Aut(V)$ skup svih automorfizama (bijektivnih trasformacija V u V), tada $(Aut(V), \circ)$ jeste grupa. Kako je grupa $(Aut(V), \circ)$ izomorfna sa algebarskom strukturom $(\mathcal{M}'_{nn}, \cdot)$, gde je V n-dimenzioni vektorski prostor, a $\psi^{-1}(Aut(V)) = \mathcal{M}'_{nn} \subseteq \mathcal{M}_{nn}$, to je onda i $(\mathcal{M}'_{nn}, \cdot)$ takođe grupa REGULARNIH matrica reda n u odnosu na množenje matrica, koja nije komutativna!

Neutralni element u grupi $(\mathcal{M}'_{nn}, \cdot)$ jeste matrica I koja je definisana sa $I = [a_{ij}]_{nn}$ ako i samo ako je $a_{ij} = 0$ za $i \neq j$, a $a_{ij} = 1$ za $i = j$, jer za tako definisanu matricu I, koja se naziva jedinična matrica važi $Ix = x$, gde simbol x ima dvostruko značenje, i to ako I tretiramo kao identičku transformaciju, tada je x vektor ili uređena n-torka, a ako je I jedinična matrica, tada je x matrica kolona.

Kako $(\mathcal{M}'_{nn}, \cdot)$ jeste grupa, to svaka matrica iz tog skupa ima sebi inverznu, dok svaka matrica iz $(\mathcal{M}_{nn}, \cdot)$ nema sebi inverznu.

Poglavlje 17

RANG MATRICE I INVERZNA MATRICA

Definicija matrice data je u 16.1. Sledi definicija podmatrice (submatrice) neke matrice.

Definicija 17.1 *Podmatrica matrice M_{mn} jeste matrica koja se dobija od matrice M_{mn} izbacivanjem proizvoljnog broja vrsta i proizvoljnog broja kolona.*

Definicija 17.2 *Kvadratna podmatrica reda r matrice M_{mn} je kvadratna matrica reda r koja se dobija kada se u matrici M_{mn} izbace proizvoljne $m-r$ vrste i $n-r$ kolone.*

Definicija 17.3 *Minor reda r matrice M_{mn} je determinanta neke njene kvadratne podmatrice reda r.*

Neke od podmatrica matrice

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 9 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 0 & 2 \\ 5 & 8 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 5 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

su na primer (nema ih više od 961):

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 9 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 9 & 1 \\ 7 & 9 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 9 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 3 & 2 & 6 \\ 7 & 5 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Minori matrice

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 9 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 0 & 2 \\ 5 & 8 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 5 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

na primer:

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 9 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 9 & 1 \\ 7 & 9 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 9 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 3 & 2 & 6 \\ 7 & 5 & 9 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Zadatak 17.4 *Koliko postoji različitih podmatrica matrica*

a) $[7]$ *b)* $\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$? *c)* $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 7 & 9 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$?

Rešenje: a) 1 b) 9

c) $\binom{3}{1}\left(\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}\right)+\binom{3}{2}\left(\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}\right)+\binom{3}{3}\left(\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}\right) = (2^3-1)^2 = 49$

Zadatak 17.5 *Koliko postoji* najviše *različitih podmatrica kvadratne matrice reda n?*

Ekvivalentna formulacija ovoga zadatka glasi: „Ako su svaka dva elementa u matrici reda n različita, koliko tada ima različitih podmatrica te kvadratne marice ?" ili

Dokazati da ne postoji više od $\overline{4^n - 2^{n+1} + 1}$ *različitih podmatrica kvadratne matrice reda n.*

$(2^n-1)^2$

Zadatak 17.6 *Koliko postoji* najviše *različitih kvadratnih podmatrica kvadratne matrice reda n?*

Rešenje $\binom{2n}{n} - 1$

Zadatak 17.7 *Za sledeće matrice odrediti sve različite*
a) *kvadratne podmatrice* b) *minore*

$$[7] \qquad \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 7 & 9 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Rešenje: a) 1 5 19 b) 1 5 18

Definicija 17.8 *Rang matrice jeste funkcija označena kao* **rang**, *koja preslikava skup matrica u skup nenegativnih celih brojeva na sledeći način.*

1. *Ako je* $A = 0$, *tada je* **rang** A*=0.*
2. *Kad je* $A \neq 0$, *tada je* **rang** *matrice* A *jednak* r *ako postoji minor reda* r *različit od nule, a svi minori reda većeg od* r, *ukoliko postoje, jednaki su nuli.*

Drugim rečima, minor najvišeg reda matrice različit od nule, naziva se bazični minor i njegov red je rang te matrice.

Odnosno, **red najviše kvadratne podmatrice** (u smislu broja vrsta odnosno kolona) matrice A, čija je determinanta različita od nule, jeste rang matrice A.

Definicija 17.9 *Ako je rang matrice* A *jednak* r, *tada se svi minori reda* r *različiti od nule nazivaju bazični minori.*

Primer 17.10

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 9 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 9 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \textbf{rang}\, A = 3$$

Koliko najviše bazičnih minora može imati prethodna matrica? $\binom{5}{3}$

Drugim rečima, ako su svi elementi matrice A ispod glavne dijagonale i r-te vrste jednaki nuli, a preostali elementi na glavnoj dijagonali različiti od nule, tada je rang matrice A jednak r.

Kako se svaka matrica ekvivalentnim transformacijama može svesti na oblik prethodne matrice i kako se ekvivalentnim transformacijama, tj. Gausovim algoritmom, rang matrice ne menja, sledi da je to, u opštem slučaju, najbrži način za određivanje ranga proizvoljne matrice. Videti 17.11 i 17.12.

Definicija 17.11 *Ekvivalentne (elementarne) transformacije matrice:*

1. *Zamena mesta vrstama (kolonama).*

2. *Množenje vrste (kolone) brojem različitim od nule.*

3. *Dodavanje neke vrste (kolone) nekoj drugoj vrsti (koloni).*

Ako su transformacije nad vrstama, one se tada nazivaju vrsta-transformacije. Analogno se definišu kolona-transformacije.

Teorema 17.12 *Ekvivalentnim odnosno elementarnim transformacijama* ***rang*** *matrice se ne menja.*

Dokaz Kako se zamenom mesta vrstama u kvadratnoj matrici menja znak njene determinante, a apsolutna vrednost se ne menja, i kako množenjem jedne vrste matrice X sa λ, determinanta te nove matrice je $\lambda \det(X)$, sledi da primena prvih dveju ekvivalentnih transformacija ne menja rang matrice. Pokažimo da i treća vrsta ekvivalentnih transformacija ne menja rang. Ako je u nekoj kvadratnoj podmatrici X neka vrsta dodata nekoj drugoj vrsti, $\det X$ tj. minor se ne menja zbog teoreme 10.16. Neka je rang matrice M_{mn} jednak r. Uočimo sada neku podmatricu C_{rr} matrice M_{mn} takvu da je $\det C_{rr} \neq 0$ (koji postoji jer je $\boldsymbol{rang}\, M_{mn} = r$) i neku vrstu koja „ne prolazi" kroz C_{rr}. Označimo sa $b_1, b_2, ..., b_r$ one elemente te vrste koji pripadaju kolonama koje prolaze kroz uočeni minor. Neka je A_{rr} podmatrica dobijena od podmatrice C_{rr} tako što je i-ta vrsta podmatrice C_{rr} zamenjena sa $b_1, b_2, ..., b_r$ i neka je B_{rr} podmatrica dobijena od podmatrice C_{rr} tako što je i-toj vrsti dodata vrsta $b_1, b_2, ..., b_r$. Sada, na osnovu teoreme 10.18 (osobina determinanti) sledi da je $\det C_{rr} + \det A_{rr} = \det B_{rr}$. Kako je $\det C_{rr} \neq 0$, to iz prethodne jednakosti sledi da je bar jedan od minora $\det B_{rr}$ ili $\det A_{rr}$ različit od nule, a kako su oni oba reda r, sledi da se rang matrice M_{mn} neće smanjiti. Rang se neće ni povećati, jer kako su $\det C_{r+1,r+1} = 0$ i $\det A_{r+1,r+1} = 0$, to je i $\det B_{r+1,r+1} = \det C_{r+1,r+1} + \det A_{r+1,r+1} = 0 + 0 = 0$. $\square$

Drugim rečima, dokaz ove teoreme je neposredna posledica osobina determinanti.

Definicija 17.13 *Za matrice A i B istog formata kaže se da su ekvivalentne ako imaju isti rang, to jest ako se jedna od druge mogu dobiti ekvivalentnim transformacijama. To se označava sa $A \sim B$.*

Na osnovu izloženog sledi:

Matrice istog formata imaju jednak rang ako i samo ako se mogu ekvivalentnim transformacijama svesti jedna na drugu.

Lema 17.14
Neka su matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$ *i* $B = [b_{ij}]_{nn}$ *nad poljem* $\mathbb{R}$. *Tada važi:*

$$\mathbf{rang}(A) = \mathbf{rang}(B) \Rightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{R})\, det(A) = \lambda\, det(B).$$

Teorema 17.15 *Ako je* r *rang matrice* $B_{mn} = [b_{ij}]_{mn}$, *tada se, ekvivalentnim transformacijama, od te matrice može dobiti matrica* $\star$

$$\star \qquad \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1\,r+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2\,r+1} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & \dots & a_{3\,r+1} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{r\,r+1} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

u kojoj ne postoje elementi ispod glavne dijagonale i r*-te vrste različiti od nule, a prvih* r *elemenata na glavnoj dijagonali su jedinice. Očevidno je da svaka matrica oblika* $\star$ *ima rang* r.

Matrice oblika $\star$ *nazvaće se trouglaste matrice, a matrice koje se od matrica oblika* $\star$ *razlikuju samo u tome što su umesto jedinica brojevi različiti od nule, biće takođe trouglaste matrice.*

Dokaz Na osnovu definicije ranga dobija se da je $r = 0 \Leftrightarrow B_{mn} = [b_{ij}]_{mn} = 0$ i u tom slučaju teorema je očevidno tačna. Neka je sada $B_{mn} = [b_{ij}]_{mn} \neq 0$. Ako su svi elementi prve kolone jednaki nuli, tada se zamene mesta prvoj i drugoj koloni. Ako su i sada svi elementi prve kolone jednaki nuli, tada zamenimo mesta prvoj i trećoj koloni. Nastavljanjem ovog postupka dolazi se do kolone u kojoj je bar jedan element različit od nule, na primer k-ti po redu, u protivnom polazna matrica bila bi nula matrica. Sada zamenimo mesta k-toj i prvoj vrsti. Prvu vrstu podelimo sa elementom koji je na njenom prvom mestu za koji znamo da je različit od nule, a zatim množimo odgovarajućim brojevima i dodajemo ostalim vrstama tako da svi elementi prve kolone, izuzev prvog, koji je jedinica, budu jednaki nuli. Ako matrica nema više vrsta ili kolona, onda je njen rang jednak $r = 1$ i dobijena matrica je traženog oblika. U suprotnom, posmatramo njenu podmatricu dobijenu brisanjem prve vrste i prve kolone. Ako je podmatrica nula matrica, rang polazne matrice opet je $r = 1$ i matrica je traženog oblika, a ako je podmatrica različita od nula matrice, na nju se primeni isti postupak kao i na polaznu matricu. To se sve čini dok se ne pojavi nula podmatrica ili se dogodi da brisanjem prve kolone i vrste nestane posmatrana matrica jer se sastojala samo od jedne vrste ili kolone. Tada je poslednja matrica očevidno traženog oblika. Kako rang te poslednje matrice mora biti r zbog teoreme 17.12, ova poslednja matrica mora imati tačno r prvih vrsta čiji svi elementi nisu nule, u protivnom bi rang te matrice bio manji od r. Opisani algoritam mora se završiti u konačno mnogo koraka jer broj vrsta i kolona je konačan. Ovaj algoritam naziva se Gausov algoritam.

Strogi dokaz ove teoreme daje se indukcijom po broju vrsta m matrice $[b_{ij}]_{mn}$, za svako n. Za $r=\boldsymbol{rang}\, B_{mn} = 0$ tvrđenje je očevidno tačno. Neka je sada $r=\boldsymbol{rang}\, B_{mn} \neq 0$ odnosno $B_{mn} \neq 0$. Za $m = 1$ tvrđenje je tačno jer tada matrica ima samo jednu vrstu u kojoj je bar jedan element različit od nule (zbog $\boldsymbol{rang}\, B_{mn} \neq 0$). Kako sada matrica ima samo jednu vrstu zamenićemo mesta kolonama tako da na prvom mestu bude elemenat različit od nule, a potom celu tu vrstu podeliti sa elementom koji se nalazi na prvom mestu. Pretpostavimo sada da je tvrđenje tačno za m i dokažimo da je tvrđenje tačno i za $m+1$. Uočiti matricu $B_{m+1,n}$ od $m+1$ vrsta. Kao što je na početku prethodnog pasusa pokazano, ova matrica se ekvivalentnim transformacijama jednostavno svodi na matricu u kojoj je prvi element prve kolone 1, a svi ostali elementi prve kolone 0 (opet moguće zbog $\boldsymbol{rang}\, B_{mn} \neq 0$). Ako je matrica $B_{m+1,n}$ imala samo jednu kolonu, dokaz je završen, ako je imala bar dve kolone, tada se brisanjem prve kolone i prve vrste dobija matrica od m vrsta koja je ili nula matrica ili se na nju može primeniti induktivna pretpostavka. Posle ovoga, u oba slučaja očevidno je dobijena matrica traženog oblika, pa je dokaz indukcijom završen. $\square$

Matrica ima rang r ako i samo ako se ekvivalentnim transformacijama može svesti na matricu oblika $\star$ 17.15.

U svim primerima rang matrice traži se tako što ekvivalentnim (elementarnim) transformacijama svodi na oblik $\star$ (videti 17.15), tj. trougaoni oblik, s tim što umesto jedinica na glavnoj dijagonali mogu biti i proizvoljni skalari polja različiti od nule.

Primer Ispitati rang matrice u zavisnosti od realnih parametara a, b i c:

$$\begin{bmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{bmatrix}$$

Rešenje. Sprovesti sledeće ekvivalentne transformacije. Četvrtu kolonu pomnožiti sa -1 i dodati prvoj koloni. Prvu vrstu dodati četvrtoj vrsti.

Treću kolonu pomnožiti sa -1 i dodati drugoj koloni. Drugu vrstu dodati trećoj vrsti, treću četvrtoj vrsti. Četvrtu kolonu pomnožiti sa -1 i dodati trećoj koloni. Tako se dobijaju njoj ekvivalentna matrica i rang r:

$$\begin{bmatrix} a-b & 0 & c-b & b \\ 0 & a-b & b-c & c \\ 0 & 0 & a+b-2c & 2c \\ 0 & 0 & 0 & a+b+2c \end{bmatrix}$$

Ako je	$a=b \wedge c=b=0$	rang je	r=0
Ako je	$a=b \wedge c=b \neq 0$	rang je	r=1
Ako je	$a=b \wedge c \neq b \wedge c=-b$	rang je	r=1
Ako je	$a=b \wedge c \neq b \wedge c \neq -b$	rang je	r=2
Ako je	$a \neq b \wedge a+b-2c=0 \wedge c=0$	rang je	r=2
Ako je	$a \neq b \wedge a+b-2c=0 \wedge c \neq 0$	rang je	r=3
Ako je	$a \neq b \wedge a+b-2c \neq 0 \wedge a+b+2c=0$	rang je	r=3
Ako je	$a \neq b \wedge a+b-2c \neq 0 \wedge a+b+2c \neq 0$	rang je	r=4

Elementi glavne dijagonale matrice $[a_{ij}]_{mn}$ su a_{ii}, gde i preuzima sve vrednosti prirodnih brojeva od 1 do $\boldsymbol{min}\{m,n\}$, elementi ispod glavne dijagonale su a_{ij} za $i>j$ i elementi ispod r-te vrste su a_{ij} za $i>r$.

Teorema 17.16 *Rang matrice jednak je dimenziji vektorskog prostora generisanog vektorima kolona te matrice.*

Dokaz Neka je $\mathbf{b}_k=(b_{1k},b_{2k},\ldots,b_{mk})$ k-ta vektor kolona matrice $B_{mn}=[b_{ij}]_{mn}$ za svako $k=1,2,\ldots,n$. Odrediti sada dimenziju vektorskog prostora V generisanog sa $\mathcal{B}=(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_n)$. Pođimo od vektorske jednačine čije su nepoznate $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$

$$\alpha_1\mathbf{b}_1+\alpha_2\mathbf{b}_2+\ldots+\alpha_n\mathbf{b}_n=0=(0,0,\ldots,0).$$

Ona je ekvivalentna sistemu linearnih jednačina

$$\mathcal{S}_1: \quad \begin{array}{ccccc} \alpha_1 b_{11}+ & \alpha_2 b_{12}+ & \alpha_3 b_{13}+ & \ldots & +\alpha_n b_{1n}=0 \\ \alpha_1 b_{21}+ & \alpha_2 b_{22}+ & \alpha_3 b_{23}+ & \ldots & +\alpha_n b_{2n}=0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 b_{m1}+ & \alpha_2 b_{m2}+ & \alpha_3 b_{m3}+ & \ldots & +\alpha_n b_{mn}=0 \end{array}$$

čije su nepoznate $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, a matrica je očevidno baš matrica $B_{mn}=[b_{ij}]_{mn}$. Ovaj sistem linearnih jednačina ekvivalentnim transformacijama svodi se na trougaoni oblik:

$$\begin{array}{llllll}
\alpha_{i_1}+ & \alpha_{i_2}a_{12}+ & \alpha_{i_3}a_{13}+ \ldots & +\alpha_{i_r}a_{1r}+ & \alpha_{i_{r+1}}a_{1\,r+1}+ \ldots & +\alpha_{i_n}a_{1n}=0\\
& \alpha_{i_2}+ & \alpha_{i_3}a_{23}+ \ldots & +\alpha_{i_r}a_{2r}+ & \alpha_{i_{r+1}}a_{2\,r+1}+ \ldots & +\alpha_{i_n}a_{2n}=0\\
& & \alpha_{i_3} \quad + \ldots & +\alpha_{i_r}a_{3r}+ & \alpha_{i_{r+1}}a_{3\,r+1}+ \ldots & +\alpha_{i_n}a_{3n}=0\\
& & \vdots & & \vdots & \vdots\\
& & & \alpha_{i_r} \quad + & \alpha_{i_{r+1}}a_{r\,r+1}+ \ldots & +\alpha_{i_n}a_{rn}=0,
\end{array}$$

gde je $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ neka permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, odnosno $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} = \{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_n}\}$. Zbog teoreme 17.15, broj r je baš rang polazne matrice. Ako je $r = n$, tada su rang matrice i dimenzija prostora jednaki n i teorema je dokazana. Neka je sada $r < n$. Tada sledi da je sistem neodređen i da je stepen njegove neodređenosti $n - r$. Zato se nepoznate $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}$ gornjeg sistema mogu izraziti pomoću nepoznatih $\alpha_{i_{r+1}}, \alpha_{i_{r+2}}, \ldots, \alpha_{i_n}$. Sada u jednakosti $\alpha_{i_1}\boldsymbol{b}_{i_1} + \alpha_{i_2}\boldsymbol{b}_{i_2} + \ldots + \alpha_{i_n}\boldsymbol{b}_{i_n} = 0$, skalare $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}$ izraziti u funkciji od $\alpha_{i_{r+1}}, \alpha_{i_{r+2}}, \ldots, \alpha_{i_n}$ i grupisati sve vektore uz skalar $\alpha_{i_{r+1}}$, zatim uz $\alpha_{i_{r+2}}$ itd. uz skalar α_{i_n}. Kako je ta jednakost tačna za sve vrednosti skalara $\alpha_{i_{r+1}}, \alpha_{i_{r+2}}, \ldots, \alpha_{i_n}$, sve linearne kombinacije tih vektora uz te skalare $\alpha_{i_{r+1}}, \alpha_{i_{r+2}}, \ldots, \alpha_{i_n}$, moraju biti jednake nuli (uzima se da je tačno jedan od tih skalara jednak 1 a ostali jednaki 0). Dobijaju se $n-r$ jednakosti, odnosno $n-r$ linearnih kombinacija vektora skupa $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$, koje su jednake nuli. Posmatrati te $n-r$ jednakosti „kao sistem" $\mathcal{S}_2$ od $n-r$ jednačina čije su nepoznate vektori $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n$. Sistem $\mathcal{S}_2$ ekvivalentnim transformacijama svodi se na trougaoni oblik koji će imati isti broj jednačina, to jest $n - r$, kao i sistem $\mathcal{S}_2$, jer ako bi ih bilo manje, sistem jednačina $\mathcal{S}_1$, čije su nepoznate skalari α_i, ima stepen neodređenosti različit od $n - r$. Kako ovaj trougaoni oblik ima tačno $n - r$ jednakosti, to sledi da se neki $n - r$ vektori iz skupa $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$, na primer baš onih $n - r$ sa glavne dijagonale u trougaonom obliku, mogu izraziti preostalim r vektorima toga skupa, što znači da ti r vektori generišu vektorski prostor V koga generišu i svi vektori skupa $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$. Ti r vektori jesu i minimalni broj generatora, tj. baza tog prostora V, jer u protivnom, sistem $\mathcal{S}_2$ morao bi imati više od $n - r$ jednačina. Kako je rang polazne matrice r i dimenzija prostora generisanog vektorima $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ takođe r, to je dokaz završen. Pogledati zadatak 17.17, jer faktički ponavlja ceo ovaj dokaz. $\square$

Dimenzija vektorskog prostora V jednaka je razlici broja vektora $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ koji ga generišu i broja jednačina sistema S_2 odnosno veza među vektorima

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n,$$

gde su nepoznate vektor $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$. Sada je očevidno da je dimenzija prostora V jednaka $n-(n-r)=r$, odnosno jednaka rangu r matrice pomenutog sistema jednačina.

Analogno se dokazuje da je rang matrice jednak dimenziji vektorskog prostora generisanog vektorima vrsta matrice.

Evo prethodne teoreme ilustrovane na sledećem primeru.

Zadatak 17.17 *Neka je V vektorski prostor generisan uređenom petorkom vektora (a,b,c,d,e). Naći sve linearne zavisnosti ove petorke vektora, dimenziju prostora V, napisati sve baze prostora V čije su komponente iz skupa $S=\{a,b,c,d,e\}$, pri čemu od n-torki koje su baze i razlikuju se samo u redosledu komponenti, treba pisati samo leksikografski prvu i naći rang matrice čije su kolone vektori a,b,c,d,e ako je:*

$a=(2,-1,3,1)$ $\quad b=(1,0,-1,2)$ $\quad c=(0,1,-5,3)$

$d=(1,1,-6,5)$ $\quad e=(-1,-2,12,-10)$.

Rešenje. $\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d+\varepsilon e=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{array}{rrrrrl} 2\alpha & +\beta & & +\delta & -\varepsilon & =0 \\ -\alpha & & +\gamma & +\delta & -2\varepsilon & =0 \\ 3\alpha & -\beta & -5\gamma & -6\delta & +12\varepsilon & =0 \\ \alpha & +2\beta & +3\gamma & +5\delta & -10\varepsilon & =0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rrrrrl} \alpha & +2\beta & +3\gamma & +5\delta & -10\varepsilon & =0 \\ & -7\beta & -14\gamma & -21\delta & +42\varepsilon & =0 \\ & 2\beta & +4\gamma & +6\delta & -12\varepsilon & =0 \\ & -3\beta & -6\gamma & -9\delta & +19\varepsilon & =0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{rrrrrl} \alpha & +2\beta & -10\varepsilon & +3\gamma & +5\delta & =0 \\ & \beta & -6\varepsilon & +2\gamma & +3\delta & =0 \\ & & \varepsilon & & & =0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrr} \alpha & = & \gamma & +\delta \\ \beta & = & -2\gamma & -3\delta \\ \varepsilon & = & 0 & \end{array}$$

Sve zavisnosti skupa vektora S date su sa $(\gamma+\delta)a+(-2\gamma-3\delta)b+\gamma c+\delta d+0\cdot e=0 \Leftrightarrow (a-2b+c)\gamma+(a-3b+d)\delta=0$ gde su γ i δ proizvoljni realni brojevi. Za $\gamma=0$ i $\delta=1$ dobija se da je $a-3b+d=0$, dok za $\gamma=1$ i $\delta=0$ sledi $a-2b+c=0$. Znači da je $\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d+\varepsilon e=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{array}{rrrrl} a & -3b & & +d & +0\cdot e=0 \\ a & -2b & +c & & +0\cdot e=0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rrrrl} a & -3b & & +d & +0\cdot e=0 \\ & b & +c & -d & +0\cdot e=0 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)\in L\Big((1,-3,0,1,0),(0,1,1,-1,0)\Big)$$

Kako je skalar $\varepsilon = 0$, to vektor e koji stoji uz njega mora obavezno biti u svakoj od traženih baza, jer se iz toga sistema ne može izraziti preko preostalih vektora!

Iz poslednjeg sistema sledi da su vektori a i b nepotrebni u generisanju prostora V, pa (c, d, e) je generatorna za V te je $\dim V \leq 3$. Međutim, kako poslednji sistem reprezentuje **SVE** zavisnosti skupa vektora $S = \{a, b, c, d, e\}$, to $\dim V = 3$, u protivnom poslednji sistem u tom trougaonom obliku morao bi imati **TRI** nezavisne jednačine, a on ima **DVE**. Očito je da (c, d, e) jeste baza prostora V, ali kako proveriti da li je (a, b, e) baza prostora V? Komplement skupa $\{a, b, e\}$ u odnosu na skup S jeste $\{c, d\}$. Ako se elementi skupa $\{c, d\}$ mogu izraziti samo preko skupa vektora $\{a, b, e\}$, to će značiti da (a, b, e) jeste baza, jer se već zna da je $\dim V = 3$. Drugim rečima, treba proveriti da li poslednji sistem u kojem je skup nepoznatih $\{c, d\}$, jeste takav da se c i d mogu izraziti preko vektora a, b i e, odnosno da li je determinanta sistema $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ različita od nule ili jednaka nuli! Ako je različita od nule, onda će (a, b, e) biti baza, u protivnom neće. Kako je $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, to (a, b, e) jeste baza. Tako se dobija da (a, b, e), (a, c, e), (a, d, e), (b, c, e), (b, d, e), i (c, d, e) jesu baze. Videti definiciju 14.17, gde stoji da je $\{a, b, e\}$ baza akko je (a, b, e) baza.

Uočiti razliku i sličnosti između sistema zavisnosti nekog skupa vektora i homogenog sistema linearnih jednačina nad nekim poljem!

Razlika je ____.

Dimenzija vektorskog prostora V može se računati i kao razlika ukupnog broja vektora koji ga generišu minus stepen neodređenosti dobijenog sistema linearnih jednačina po $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ tj. $\dim V = 5 - 2 = 3$ ili ukupan broj vektora minus rang matrice A sistema zavisnosti vektora a, b, c, d, e. U ovom zadatku matrica A sistema zavisnosti glasi

$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, čiji je rang očevidno jednak 2.

Kako je matrica X čiji se rang traži, ekvivalentna matrici Y koja je dobijena od matrice X ekvivalentnim transformacijama, odnosno

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -5 & -6 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & -10 \end{bmatrix} \sim Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -10 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -6 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

to je $\boldsymbol{rang}\ X = \boldsymbol{rang}\ Y = \dim V = 3$.

I na ovom primeru provereno je da rang matrice je jednak dimenziji vektorskog prostora generisanog vektorima kolonama te matrice.

Može se primetiti da ovaj primer u potpunosti reprezentuje i opšti dokaz teoreme!

Postoji potpuna analogija između ekvivalentnih transformacija matrice i ekvivalentnih transformacija sistema linearnih jednačina.

Teorema 17.18 $\boldsymbol{\beta_1}=(\beta_{11},\beta_{21},\dots,\beta_{m1})$, $\boldsymbol{\beta_2}=(\beta_{12},\beta_{22},\dots,\beta_{m2})$, $\dots$, $\boldsymbol{\beta_n}=(\beta_{1n},\beta_{2n},\dots,\beta_{mn})$ *su vektori iz* F^m, *gde je* $(F,+,\cdot)$ *neko polje, neka je* $(\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\dots,\boldsymbol{a_m})$ *m-torka vektora koja generiše vektorski prostor* $(V,F,+,\cdot)$ *i za sve skalare* $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$ *iz* F *važi*

$$\alpha_1\boldsymbol{a_1}+\dots+\alpha_m\boldsymbol{a_m}=0 \Leftrightarrow (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)\in L(\boldsymbol{\beta_1},\dots,\boldsymbol{\beta_n}).$$

Tada je dimenzija vektorskog prostora $(V,F,+,\cdot)$ *jednaka* $m-r$, *gde je* r *rang matrice* A *čije su kolone vektori* $\boldsymbol{\beta_1},\dots,\boldsymbol{\beta_n}$ *odnosno*

$$A = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \dots & \beta_{mn} \end{bmatrix} \qquad i \quad \boldsymbol{rang}\ A = r$$

Dokaz ove teoreme sledi iz zadataka 14.37 i 17.17.

Konstruisati algoritam za određivanje svih baza prostora V čije su komponente iz skupa $\{\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\dots,\boldsymbol{a_n}\}$.

Algoritam je opisan u zadacima 14.37 i 17.17 i na ispitu se vrlo često pojavljuju takvi zadaci!

Teorema 17.19 *Za svaku kvadratnu matricu* B_{nn} *važi da je njena determinanta različita od nule ako i samo ako su njeni vektori kolone (vrste) linearno nezavisni, to jest*

$$\det B_{nn} \neq 0 \;\Leftrightarrow\; (\boldsymbol{b_1},\boldsymbol{b_2},\dots,\boldsymbol{b_n}) \text{ je nezavisna},$$

gde je $\boldsymbol{b_i}=(b_{1i},b_{2i},\dots,b_{ni})$ *i-ta vektor kolona matrice* $B_{nn}=[b_{ij}]_{nn}$ *za svako* $i=1,2,\dots,n$.

Dokaz

($\Rightarrow$)

Ako je $\det B_{nn} \neq 0$, tada je n-torka vektora $(\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \ldots, \boldsymbol{b_n})$ nezavisna. Dokaz se izvodi kontradikcijom, odnosno pretpostavkom da je n-torka $(\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \ldots, \boldsymbol{b_n})$ zavisna. Tada se bar jedna kolona $\boldsymbol{b_k}$ od kolona te n-torke može napisati kao linearna kombinacija preostalih kolona i neka su skalari u toj linearnoj kombinaciji redom $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$. Ako se sada svaka od preostalih vektor kolona pomnoži redom sa skalarima $-\lambda_1, -\lambda_2, \ldots, -\lambda_{n-1}$ i sve doda koloni $\boldsymbol{b_k}$, dobiće se da su u koloni $\boldsymbol{b_k}$ sve nule, to jest da je $det\, B_{nn} = 0$, što je kontradikcija uslovu.

($\Leftarrow$)

Neka je n-torka vektora $(\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \ldots, \boldsymbol{b_n})$ nezavisna. Dokazati da je $det\, B_{nn} \neq 0$. Dokaz se opet izvodi kontradikcijom to jest pretpostavkom da je $det\, B_{nn} = 0$, što znači da je $\boldsymbol{rang}\, B_{nn} < n$, odnosno $dim\, L(\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \ldots, \boldsymbol{b_n}) < n$ zbog teoreme 17.16. Kako n-torka vektora $(\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \ldots, \boldsymbol{b_n})$, generiše prostor dimenzije manje od n, po teoremi 14.31 n-torka $(\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \ldots, \boldsymbol{b_n})$ linearno je zavisna, što je kontradikcija uslovu. $\square$

Drugim rečima, determinanta matrice jednaka je nuli ako i samo ako su vektori kolona linearno zavisni.

Teorema 17.20 *Neka su* $\mathbf{a_1} = (a_{11}, \ldots, a_{n1})$, $\mathbf{a_2} = (a_{12}, \ldots, a_{n2}), \ldots, \mathbf{a_n} = (a_{1n}, \ldots, a_{nn})$ *vektori kolone matrice* $A = A_{nn} = [a_{ij}]_{nn}$ *i neka je* $V = Lin(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots \mathbf{a_n}) = \{\alpha_1\mathbf{a_1} + \alpha_2\mathbf{a_2} + \ldots + \alpha_n\mathbf{a_n} | \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$. *Tada:* $\dim V = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{rang}\, A = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a_1} = \ldots \mathbf{a_n} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a_1}^2 + \ldots + \mathbf{a_n}^2 = 0$, *gde je* $\mathbf{a_i}^2$ *skalarni proizvod vektora* $\mathbf{a_i}$ *sa samim sobom.*

Na testovima se pojavljuju primeri poput ovih koji slede, u kojima se zaokružuje samo broj ispred iskaza koji je tačan, ili se upisuje odgovor na ostavljena prazna mesta. Broj tačnih iskaza može biti 0,1,2,..., svi.

Test 17.21 *Neka su* $\mathbf{a_1} = (a_{11}, \ldots, a_{n1})$, $\mathbf{a_2} = (a_{12}, \ldots, a_{n2}), \ldots, \mathbf{a_n} = (a_{1n}, \ldots, a_{nn})$ *vektori kolone matrice* $A = A_{nn} = [a_{ij}]_{nn}$ *i neka je* $V = Lin(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots \mathbf{a_n}) = \{\alpha_1\mathbf{a_1} + \alpha_2\mathbf{a_2} + \ldots + \alpha_n\mathbf{a_n} | \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$. *Tada:* **1.** $\det A \neq 0 \Leftrightarrow rang\, A < n$ **2.** $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{rang}\, A \leq n$ **3.** $(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots \mathbf{a_n})$ *je zavisna* $\Leftrightarrow \det A = 0$ **4.** $\dim V \neq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{rang}\, A \geq 1$ **5.** $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \dim V < n$ **6.** $(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots \mathbf{a_n})$ *je zavisna* $\Leftrightarrow \boldsymbol{rang}\, A < n$.

Test 17.22 *Odrediti rang* r *matrice* A *u sledećih osam slučajeva.*

$$A=\begin{bmatrix} p & r & r & q \\ r & p & q & r \\ r & q & p & r \\ q & r & r & p \end{bmatrix}$$

a) $(p,q,r)=(0,0,0)$ b) $(p,q,r)=(1,1,1)$ c) $(p,q,r)=(1,1,-1)$ d) $(p,q,r)=(1,1,2)$ e) $(p,q,r)=(1,-1,0)$ f) $(p,q,r)=(1,3,2)$ g) $(p,q,r)=(1,-3,1)$ h) $(p,q,r)=(1,2,1)$.

a) r= b) r= c) r= d) r= e) r= f) r= g) r= h) r=

Test 17.23 *Koje tvrđenje je tačno ako je* A *kvadratna matrica reda* n: a) $\det A=0\Rightarrow \textbf{\textit{rang}}\,A=0$, b) $\det A=0\Rightarrow \textbf{\textit{rang}}\,A=n$, c) $\det A=0\Leftrightarrow \textbf{\textit{rang}}\,A\leq n-1$, d) $\textbf{\textit{rang}}\,A=n\Rightarrow \det A\neq 0$.

Test 17.24 *Neka su* $A\sim B\Leftrightarrow$ *kvadratne matrice* A *i* B *reda* n *su ekvivalentne. Zaokružiti tačno:* a) $A\sim B\Rightarrow\big(\det A=0\Leftrightarrow\det B=0\big)$, b) $A\sim B\Leftrightarrow|\det A|=|\det B|$, c) $A\sim B\Rightarrow\det A=\det B$, d) $\det A=\det B\neq 0\Rightarrow A\sim B$, e) $(\det A\neq 0\wedge\det B\neq 0)\Rightarrow A\sim B$, f) *Ako je* $\lambda\neq 0$, *tada važi da* $\det A=\lambda\det B\Rightarrow A\sim B$,

Test 17.25 *Za regularne kvadratne matrice* A,B,C *reda* n *važi:*
a) $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$ b) $AB=BA$ c) $A(BC)=(AB)C$ d) $\det\lambda A=\lambda\det A$ e) $AB=BA$ f) $\det(AB)=\det A+\det B$ g) $\det(A+B)=\det A+\det B$ h) $\det(AB)=\det A\det B$.

Test 17.26 *Neka* $A\sim B$ *znači da su matrice* A *i* B *ekvivalentne. Tada zaokružiti tačan odgovor:*
a) $A\sim B\Rightarrow\big(\textbf{\textit{rang}}\,A=0\Leftrightarrow\textbf{\textit{rang}}\,B=0\big)$,
b) $det(A)=det(B)\Rightarrow A\sim B$, c) $A\sim B\Rightarrow det(A)=det(B)$,
d) $A\sim B\Rightarrow|det(A)|=|det(B)|$, e) $A\sim B\Leftrightarrow|det(A)|=|det(B)|$,
f) $A\sim B\Leftrightarrow\big(\textbf{\textit{rang}}\,A=0\Leftrightarrow\textbf{\textit{rang}}\,B=0\big)$.

U sledećim testovima zaokružiti broj ispred tačnog odgovora.

Test 17.27 *Ako je* $f:V\to W$ *izomorfizam vektorskog prostora* V *u vektorski prostor* W, *tada:* 1) *postoji* f^{-1} 2) $dim(V)=dim(W)$ 3) $V=W$ 4) *za svaku nezavisnu* n*-torku* $(v_1,\dots,v_n)$, $\big(f(v_1),\dots,f(v_n)\big)$, n*-torka je nezavisna* 5) *za svaku zavisnu* n*-torku* $(v_1,\dots,v_n)$, $\big(f(v_1),\dots,f(v_n)\big)$, n*-torka je zavisna* 6) $f(x)=0\Rightarrow x=0$ 7) $f(0)=y\Rightarrow y=0$.

Test 17.28 *Ako je $f : V \to W$ homomorfizam (linearna transformacija) vektorskog prostora V u vektorski prostor W, tada:*
1) *postoji f^{-1}* **2)** *$dim(V) = dim(W)$* **3)** *$V = W$* **4)** *za svaku nezavisnu n-torku vektora $(v_1, ..., v_n)$ iz V, n-torka $\Big(f(v_1), ..., f(v_n)\Big)$ je nezavisna u W* **5)** *za svaku zavisnu n-torku vektora $(v_1, ..., v_n)$ iz V, n-torka $\Big(f(v_1), ..., f(v_n)\Big)$ je zavisna u W* **6)** *$f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.*

Test 17.29 *Za svaku linearnu transformaciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i svako $x, y, \lambda, v \in \mathbb{R}$ tačno je:* **1)** *$f(1) = 1$* **2)** *$f(0) = 0$* **3)** *$f(xy) = f(x)f(y)$* **4)** *$f(0) = 1$* **5)** *$f(-x) = -x$* **6)** *$f(xy) = x\,f(y)$* **7)** *$f(\lambda v) = f(\lambda) + f(v)$.*

U poglavlju Determinante date su definicije minora M_{ij} i kofaktora A_{ij} nekoga elementa a_{ij} matrice $A = [a_{ij}]$. Sledi definicija adjungovane matrice od matrice $A = [a_{ij}]$ i označavaće se sa $A^* = adj\ A$.

Definicija 17.30 *Ako je $A = [a_{ij}]_{nn}$ kvadratna matrica, tada njoj adjungovana matrica, u oznaci $adj\ A$, jeste matrica*

$$A^* = adj\ A = [A_{ij}]_{nn}^{\top} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

TRANSPONOVANA
KOFAKTOR
MATRICA

Od matrice A dobija se njoj adjungovana matrica $adj\,A$ tako što se svaki element a_{ij} matrice A zameni njegovim kofaktorom A_{ij} i zatim izvrši transponovanje, odnosno odgovarajuće vrste i kolone zamene mesta.

Minor M_{ij} matrice A je determinanta podmatrice matrice A koja se dobija uklanjanjem i-te vrste i j-te kolone matrice A.
Kofaktor A_{ij} matrice A je $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Primer

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad adj\,A = \begin{bmatrix} -18 & -22 & 10 \\ 12 & 17 & -8 \\ 6 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

Definicija 17.31 *Kvadratna matrica B reda n je inverzna kvadratnoj matrici A reda n ako je $AB = I$, gde je $I = [a_{ij}]_{nn}$ jedinična matrica to jest $a_{ij} = 0 \Leftrightarrow i \neq j$ i $a_{ij} = 1 \Leftrightarrow i = j$. Matrica inverzna matrici A označava se sa A^{-1}, odnosno $A^{-1} = B$*

Teorema 17.32 *Kvadratna matrica $A = [a_{ij}]_{nn}$ ima inverznu matricu ako i samo ako je njena determinanta različita od nule.*

Dokaz

($\Rightarrow$)

Ako matrica A ima sebi inverznu matricu A^{-1}, tada je $AA^{-1} = I$, a primenom teoreme 10.24 dobija se da iz $det(AA^{-1}) = det\, I$ sledi $det\, A\, det\, A^{-1} = 1$, što znači da je $det\, A \neq 0$.

($\Leftarrow$)

Na osnovu teoreme 10.23 i definicije 17.30 dobija se da je

$$A\,(adj\ A) = [a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn}]_{nn} =$$

$$= \begin{bmatrix} det\, A & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & det\, A & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & det\, A \end{bmatrix} = det\, A \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} = (det\, A)I$$

Znači, dobija se da je $A(adj\ A) = (det\, A)I$ ili $A\left((det\, A)^{-1}\ adj\ A\right) = I$, odnosno $A^{-1} = (det\, A)^{-1}\ adj\ A$. Primetimo da skalar $(det\, A)^{-1}$ postoji samo zato što je $det\, A \neq 0$. $\square$

Primer

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{-6} \begin{bmatrix} -18 & -22 & 10 \\ 12 & 17 & -8 \\ 6 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

Primer $\begin{bmatrix} 5 & 6 & -6 \\ -8 & -11 & 12 \\ -4 & -6 & 7 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -6 \\ -8 & -11 & 12 \\ -4 & -6 & 7 \end{bmatrix}$ jer je

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & -6 \\ -8 & -11 & 12 \\ -4 & -6 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 & -6 \\ -8 & -11 & 12 \\ -4 & -6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Primer 17.33 *Rešiti sistem* $\begin{array}{c} x - y + 0z = 2 \\ 2x + 0y - z = 4 \\ x + 3y - 3z = 2 \end{array}$ *matričnom metodom.*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{D_S}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ 6 & -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ 6 & -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \textit{ odnosno}$$

$(x, y, z) = (2, 0, 0) \Leftrightarrow x = 2, y = 0, z = 0.$

Definicija 17.34 *Ako kvadratna matrica A ima inverznu matricu ili $\det A \neq 0$, tada se za matricu A kaže da je regularna. U protivnom, matrica A je singularna.*

Definicija 17.35 *Skalarni proizvod vektora $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in F^n$ i vektora $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in F^n$ jeste skalar $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n \in F$.*

> **Skalarni proizvod vektora**
> **$A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ i $B = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ jeste proizvod matrica vrste $A^\top$ i kolone B.** Videti 16.3.

Napomena: U 16.3 definisano je da ako je $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ vektor, tada je $A^\top = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$ matrica vrsta, jer je A matrica kolona!

Nakon ove definicije, proizvod matrica $A = [a_{ij}]_{mn}$ i $B = [b_{ij}]_{nk}$ može se definisati na sledeći način.

Definicija 17.36 *Element matrice AB na mestu (i, j) dobija se kao skalarni proizvod i-te vektor vrste matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$ i j-te vektor kolone matrice $B = [b_{ij}]_{nn}$, tj. $AB = [a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}]_{nn}$.*

Teorema 17.37 *Ako su matrice A_1 i C_1 dobijene redom od matrica A i C tako što su nad njima vršene iste ekvivalentne vrsta-transformacije, tada iz $AB = C$ sledi $A_1B = C_1$.*

Dokaz Neka je $AB = C$. Tada, po definiciji množenja matrica, i-ta vrsta matrice C dobijena je tako što je i-ta vrsta matrice A skalarno množena redom sa svim kolonama matrice B, pa je onda očevidno da ako u matrici A zamene mesta i-ta i j-ta vrsta, a da bi se očuvala polazna jednakost, isto će se desiti i u matrici C. Analogno se zaključuje i za transformacije množenje vrste skalarom i dodavanje i-te vrste j-toj vrsti $(i \neq j)$.

Evo još jednog dokaza drugog dela teoreme 17.32:

Inverznu matricu A^{-1} matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$ naći ćemo polazeći od jednakosti $\boxed{I}A = \boxed{A}$. Sprovešće se iste ekvivalentne vrsta-transformacije nad uokvirenim matricama tako da matrica A pređe u matricu A_1 oblika $\star$ iz teoreme 12.8. Ovo je moguće dobiti samo sa vrsta-transformacijama jer je $det\, A \neq 0$, pa u svakoj koloni ima bar jedan element različit od nule i zbog toga nije potrebno menjati mesta kolonama. Pri tome se matrica I transformisala u matricu koju ćemo označiti, na primer sa I_1, i zbog teoreme 17.37 je $I_1 A = A_1$. Kako je $det\, A \neq 0$, to je $\boldsymbol{rang}A = n$ pa je i $\boldsymbol{rang}A_1 = n$, zbog čega su u matrici A_1 svi elementi na glavnoj dijagonali jednaki jedinici (a ispod glavne dijagonale jednaki nuli). Dalje se vrše iste ekvivalentne transformacije nad matricama I_1 i A_1 , tako da se od matrice A_1 dobije jedinična matrica I, što je očevidno moguće, a pri tome će od matrice I_1 nastati tražena matrica A^{-1}, jer iz $I_1 A = A_1$ dobijeno je $A^{-1}A = I$. Znači, pokazano je da ako je $det\, A \neq 0$, tada postoji matrica A^{-1} takva da je $A^{-1}A = I$.

Ovo je istovremeno i najjednostavniji algoritam za efektivno izračunavanje inverzne matrice u opštem slučaju.

Teorema 17.38 *Ako je $\mathcal{M}'_{nn}$ skup svih regularnih matrica reda n, tada je $(\mathcal{M}'_{nn}, \cdot)$ multiplikativna grupa.*

Evo jedne ekvivalentne definicije **determinante** koja se označava sa $\det : \mathcal{M}_{nn} \to F$. Osnovna definicija data je u 10.8

Definicija 17.39 *Determinanta je funkcija* $\det : \mathcal{M}_{nn} \to F$ *koja je definisana za svaki prirodni broj n tako da je*

- *linearna po svakoj vrsti (videti 10.18),*
- *jedinične matrice se preslikavaju u jedinicu polja F (videti 10.19),*
- *ako su vektori vrste matrice linearno zavisni, tada se matrica preslikava u nulu polja F (videti 10.15).*

Poglavlje 18

KARAKTERISTIČNI KORENI I VEKTORI

U mnogim oblastima matematike i drugih nauka veliku važnost i primenu imaju karakteristični koreni i vektori.

Definicija 18.1 *Neka je A kvadratna matrica reda n nad nekim poljem F. Skalar λ je karakteristična vrednost (koren) matrice A ako i samo ako postoji vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F^n$ (uređena n-torka),* različit od nula vektora *$(0, 0, \ldots, 0)$, takav da se linearnom transformacijom, koja odgovara matrici A, preslikava u vektor $\lambda\mathbf{x}$ odnosno*

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Vektor $\mathbf{x}$ tada je karakteristični vektor matrice A za karakteristični koren (karakterističnu vrednost) λ.

Linearna transformacija koja odgovara matrici A obeležava se takođe sa A, pa u jednakost $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, izraz $A\mathbf{x}$ predstavlja sliku vektora $\mathbf{x}$ funkcijom A i istovremeno proizvod matrice A i matrice kolone $\mathbf{x} = [x_1\, x_2\, \ldots\, x_n]^\top$, jer vektor $\mathbf{x}$ (uređena n-torka) može se predstaviti kao matrica kolona.

Napomena: Simbol $\mathbf{x}$ tretira se dvojako, kao uređena n-torka ili kao matrica kolona, zavisno od konteksta! To je jedan izomorfizam!

Drugim rečima, vektor $\mathbf{x} \neq (0,0,\ldots,0)$ *i njegova slika vektor* $A\mathbf{x}$ *jesu kolinearni vektori (njihove koordinate su proporcionalne) ako i samo ako je* $\mathbf{x}$ *karakteristični vektor matrice* A.

Najbrža provera da li je $\mathbf{x}$ karakteristični vektor matrice A, jeste izračunati proizvod $A\mathbf{x}$ i proveriti da li je taj vektor kolinearan sa $\mathbf{x}$ odnosno da li su njihove koordinate proporcionalne. Ako jesu, taj koeficijent proporcionalnosti je karakteristična vrednost te matrice.

Primer 18.2 *Izračunati karakteristične korene i njima odgovaraluće karakteristične vektore matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

Rešenje Po prethodnoj definiciji $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Leftrightarrow (A-\lambda I)\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rrr} (1-\lambda)x & -2y & -2z = 0 \\ x & +(5-\lambda)y & +3z = 0 \\ -x & -2y & -\lambda z = 0 \end{array}$$

Da bi postojao **nenula** vektor $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, koji je rešenje ovoga sistema linearnih jednačina, determinanta mora da bude nula, jer je sistem homogen odnosno kada bi determinanta sistema bila različita od nule, sistem bi imao samo jedno rešenje $(0,0,0)$!

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -2 \\ 1 & 5-\lambda & 3 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{1,2,3\}$$

Znači, karakteristični koreni matrice A jesu $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ i $\lambda_3 = 3$.

Polinom $f_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = |A-\lambda I| = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$ naziva se karakteristični polinom matrice A.

Karakterističnom korenu $\lambda_1 = 1$ odgovara skup karakterističnih vektora $(x,y,z) \in \mathbb{R}$ koji su nenula rešenja sistema jednačina

$$A\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x} \Leftrightarrow (A - 1\cdot I)\cdot[x\ y\ z]^\top = [0\ 0\ 0]^\top \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{rrrrr} & - & 2y & - & 2z = 0 \\ x & + & 4y & + & 3z = 0 \\ -x & - & 2y & - & z = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x = z \\ y = -z \end{array}$$

Skup karakterističnih vektora koji odgovaraju korenu $\lambda_1 = 1$ je $V_1 = \{(z,-z,z)|z \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\} = \{\alpha(1,-1,1)|\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\}$. Vidi se da je V_1

jednodimenzionalni potprostor baze $\{(1,-1,1)\}$ vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ bez $(0,0,0)$ tj. prava kroz koordinatni početak bez njega.

Analogno se dobijaju skupovi karakterističnih vektora koji odgovaraju korenu $\lambda_2 = 2$: $V_2 = \{(0,-z,z)|z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} = \{\alpha(0,-1,1)|\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ (jednodimenzionalni potprostor, tj. prava sa vektorom pravca $(0,-1,1)$) bez $(0,0,0)$ i korenu $\lambda_3 = 3$: $V_3 = \{(z,-2z,z)|z \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\} = \{\alpha(1,-2,1)|\alpha \in \mathbb{R}\setminus \{0\}\}$ (jednodimenzionalni potprostor, tj. prava sa vektorom pravca $(1,-2,1)$) bez $(0,0,0)$.

Ako se u polinomu $f_A(\lambda)$, pored slobodnog člana „dopiše" (slobodni član se pomnoži jediničnom matricom) jedinična matrica I i umesto λ svuda se zameni matrica A, tada će se za rezultat uvek dobiti nula matrica. To je poznata Kejli – Hamiltonova teorema.

Teorema 18.3 *(Kejli – Hamiltonova teorema). Svaka matrica zadovoljava svoj karakteristični polinom.*

U prethodnom primeru je $-A^3 + 6A^2 - 11A + 6I = 0$. Proverite sami!

Definicija 18.4 *Polinom $|A - \lambda I|$ ili $|\lambda I - A|$ naziva se karakteristični polinom, a $|A - \lambda I| = 0$ zovemo karakteristična jednačina matrice A.*

Teorema 18.5 *Karakteristični koreni (vrednosti) matrice jesu nule odnosno koreni njenog karakterističnog polinoma. (Videti primer 18.2)*

Teorema 18.6 *Za polinom $P(\lambda) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$, matrica A čiji je karakteristični polinom $P(\lambda) = |\lambda I - A|$ jeste:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix}$$ *Uopštenje je očevidno.*

Ovo je vrlo značajno, jer postoje brojni algoritmi za izračunavanje karakterističnih korena i karakterističnih vektora matrice, pa time i za računanje korena proizvoljnog polinoma.

Definicija 18.7 *Suma (zbir) modula (apsolutnih vrednosti) svih elemenata i-te vrste matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$, izuzev elementa sa glavne dijagonale, označava se sa r_i i naziva poluprečik Geršgorinovog kruga (intervala u slučaju realnih matrica), čiji je centar a_{ii}, tj. $r_i = -|a_{ii}| + \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.*

Teorema 18.8 *Za svaku matricu $A = [a_{ij}]_{nn}$ važi:*

a) *Ako je $|a_{ii}| > r_i$ za svako $i \in \{1,\dots,n\}$, tada je matrica A regularna ili $\det A \neq 0$.*

b) *Svaki karakteristični koren λ matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$ pripada nekom Geršgorinovom krugu (intervalu) odnosno važi $|\lambda - a_{ii}| \leq r_i$, za neko $i \in \{1,2,\dots,n\}$. Vidi definiciju 18.7.*

Definicija 18.9 *Matrice za čiju svaku vrstu važi $|a_{ii}| > r_i$ odnosno koordinatni početak ne pripada nijednom Geršgorinovom krugu, nazivaju se strogo dijagonalno dominantne ili SDD.*

Teorema 18.10 *Za svaki polinom P postoji matrica A čiji je karakteristični polinom baš P.*

Definicija 18.11 *Polinom najmanjeg stepena $m(\lambda)$, koga „zadovoljava" matrica A, tj. $m(A) = 0$, naziva se minimalni polinom matrice A.*

Kako matrica A, po Kejli – Hamiltonovoj teoremi, „zadovoljava" svoj karakteristični polinom $f_A(\lambda)$, to je onda minimalni polinom delilac karakterističnog polinoma.

Minimalni polinom matrice A traži se tako što se karakteristični polinom rastavi na proizvod nesvodljivih polinoma i napišu svi delioci (naravno, stepena većeg od nule i normalizovani). Od svih tih delilaca, minimalni polinom biće onaj koji je najmanjeg stepena i matrica A ga „zadovoljava".

Kako u prethodnom primeru karakteristični polinom matrice A jeste $f_A(\lambda) = \det|A - \lambda I| = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$, „kandidati" za minimalne polinome jesu:

$$m_1(\lambda) = \lambda - 1, \qquad m_2(\lambda) = \lambda - 2, \qquad m_3(\lambda) = \lambda - 3,$$

$m_4(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$,
$m_5(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$,
$m_6(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-3) = \lambda^2-5\lambda+6$, $m_7(\lambda) = f_A(\lambda)$. Kako je $m_1(A) = A-I \neq \mathbf{0}$, $m_2(A) = A-2\cdot I \neq \mathbf{0}$, $m_3(A) = A-3\cdot I \neq \mathbf{0}$, $m_4(A) = A^2-3\cdot A+2\cdot I \neq \mathbf{0}$, $m_5(A) = A^2-4\cdot A+3\cdot I \neq \mathbf{0}$, $m_6(A) = A^2-5\cdot A+6\cdot I \neq \mathbf{0}$, $m_7(A) = f_A(A) = \mathbf{0}$ (bez računanja – na osnovu Kejli-Hamiltonove teoreme). Dakle, minimalni polinom u ovom primeru slučajno je baš karakteristični polinom matrice A, $m(\lambda) = f_A(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$.

Najbrža provera da li vektor $(1, -2, 1)$ jeste slučajno karakteristični vektor matrice A, sastoji se u tome što se izračuna

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kako je za rezultat dobijen vektor $(3, -6, 3) = 3(1, -2, 1)$ koji je kolinearan sa $(1, -2, 1)$, sledi da $(1, -2, 1)$ jeste karakteristični vektor.

Literatura

[1] Klaus Jänich, *Linear Algebra*, Undergradute Text in Mathematics, Springer-Verlag, New York 1994.

[2] Seth Warner, *Modern Algebra*, Dover Publications, INC., New York 1990.

[3] R. Doroslovački, *Osnovi opšte i linearne algebre*, Fakultet tehničkih nauka – Stylos, Novi Sad 1997.

[4] R. Doroslovački, S. Gilezan, F. Ferenci, J. Nikić, I. Čomić, Z. Uzelac, M. Cvijanović, N. Adžić, *Zbirka rešenih zadataka iz matematike, I deo (šesto izdanje)*, Naučna knjiga, Beograd 1991.

[5] Z. Stojaković, Đ. Paunić, *Zbirka zadataka iz algebre – grupe, prsteni i polja (četvrto izdanje)*, Institut za matematiku, Novi Sad 1993.

[6] Z. Stojaković, Đ. Paunić, *Zadaci iz algebre – grupe, prsteni i polja*, Univerzitet u Novom Sadu, PMF, Novi Sad 1998.

[7] Z. Stojaković, *Uvod u linearnu algebru*, Institut za matematiku, Novi Sad 1988.

[8] Mirko Stojaković, *Teorija jednačina*, Naučna knjiga, Beograd 1973.

[9] Mirko Stojaković, *Elementi linearne algebre*, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd 1970.

Index

(iz sadržaja)

Udžbenik ima 303 stranica i 18 glava. Glave su: Nešto o logici i skupovima, osnovni pojmovi i definicije, relacije, funkcije, Bulova algebra, grupoidi i grupe, prsteni i polja, kompleksni brojevi, polinomi nad proizvoljnim poljima, konstrukcija polja i konačna polja, determinante, sistemi linearnih jednačina, slobodni vektori, analitička geometrija, vektorski prostori, matrice, linearne transformacije, rang matrice i inverzna matrica i karakteristični vektori i koreni matrice.

(iz recenzije)

Sadržaj udžbenika je izložen matematički korektno, razumljivim jezikom za studente koji pripremaju ispit iz ovih oblasti i sa mnogo primera koji u znatnoj meri pomažu lakšem usvajanju gradiva koje se izlaže. Knjiga sadrži mnoštvo originalnih zadataka, primera i dokaza autora. Smatramo da će knjiga korisno poslužiti studentima za pripremu ispita kao i drugima koji žele da se upoznaju sa pomenutim sadržajima iz matematike. Zbog svega izloženog sa zadovoljstvom predlažemo izdavanje udžbenika ALGEBRA.

(o autoru)

Autor je redovni profesor matematike na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu i inženjer mašinstva. Predaje algebru na više studijskih programa FTN-a, a predavao je matematiku na skoro svim studijskim programima FTN-a, kao i na magistarskim i doktorskim studijama. Pedagoško iskustvo stekao je radeći na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu od 1978. godine. Bio je šef katedre, direktor instituta u tri mandata, član Saveta Univerziteta, član prirodno – matematičkog i tehničko-tehnološkog stručnog veća Univerziteta. Bio je član Nacionalnog prosvetnog saveta Srbije a sada je dekan FTN-a. Autor je bio pet godina predsednik Društva matematičara Srbije, bio je dugogodišnji predsednik savezne Jugoslovenske komisije za takmičenja iz matematike i dugi niz godina učestvuje u pripremama talentovanih učenika za takmičenja iz matematike svih nivoa, kao i u pripremama državne olimpijske ekipe za međunarodnu olimpijadu. Radio je godinama u specijalističkoj matematičkoj gimnaziji J.J. Zmaj Novi Sad i jedan je od osnivača iste. Bio je predsednik organizacionog komiteta više međunarodnih i domaćih takmičenja iz matematike. Autor je objavio više naučnih radova u domaćim i međunarodnim časopisima i učestvovao na više domaćih i međunarodnih kongresa.

ISBN 978-86-7892-965-6
9 788678 929656